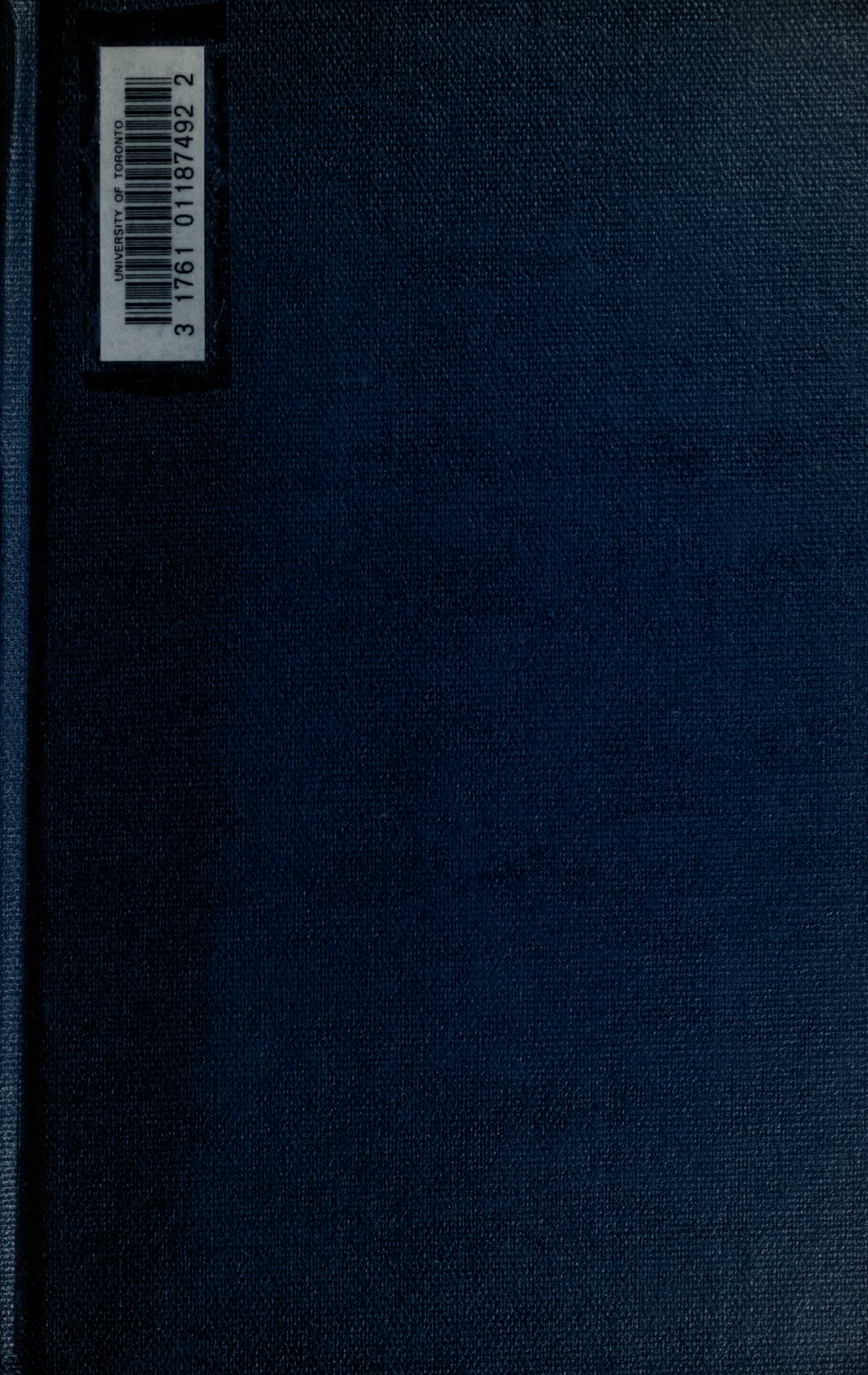
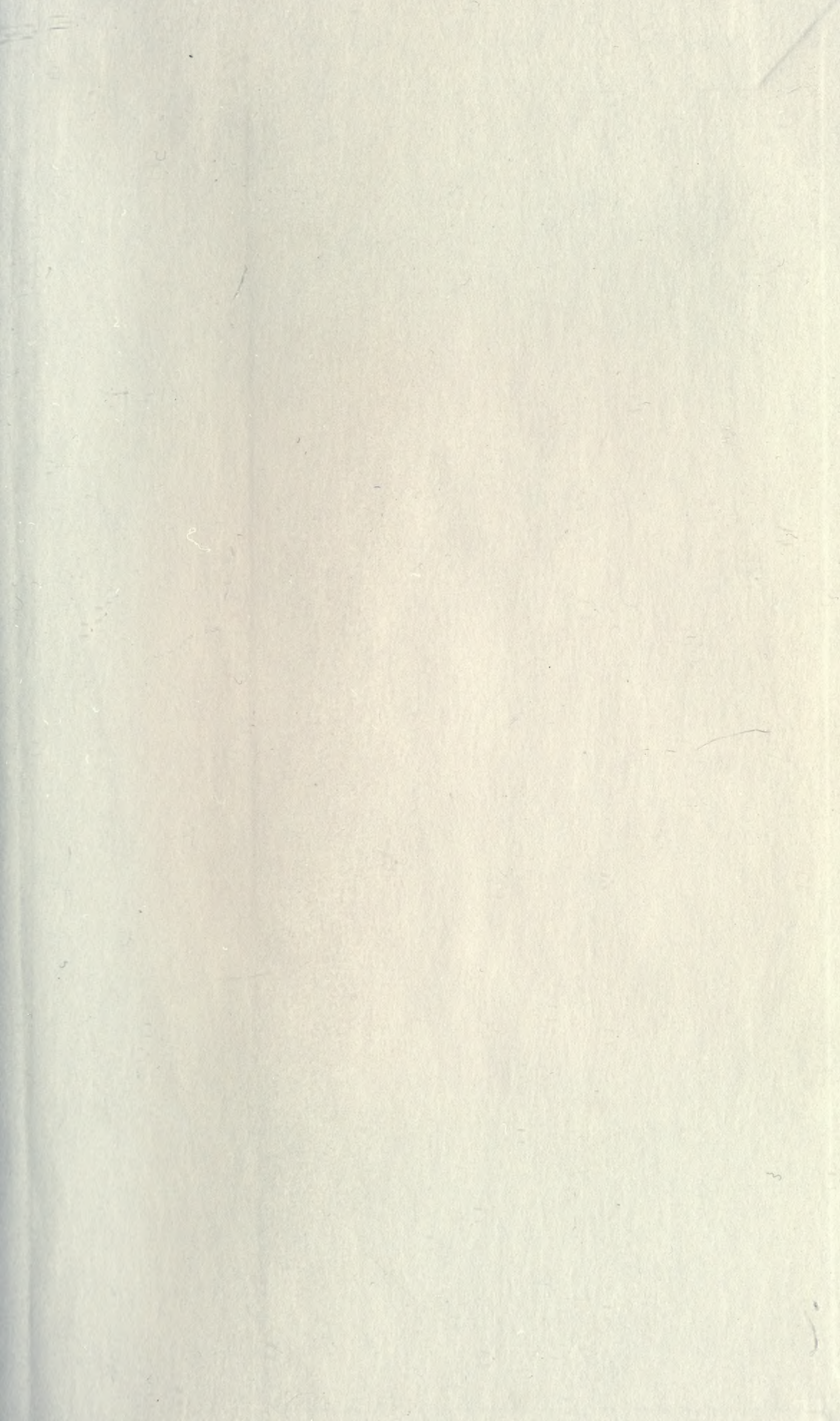
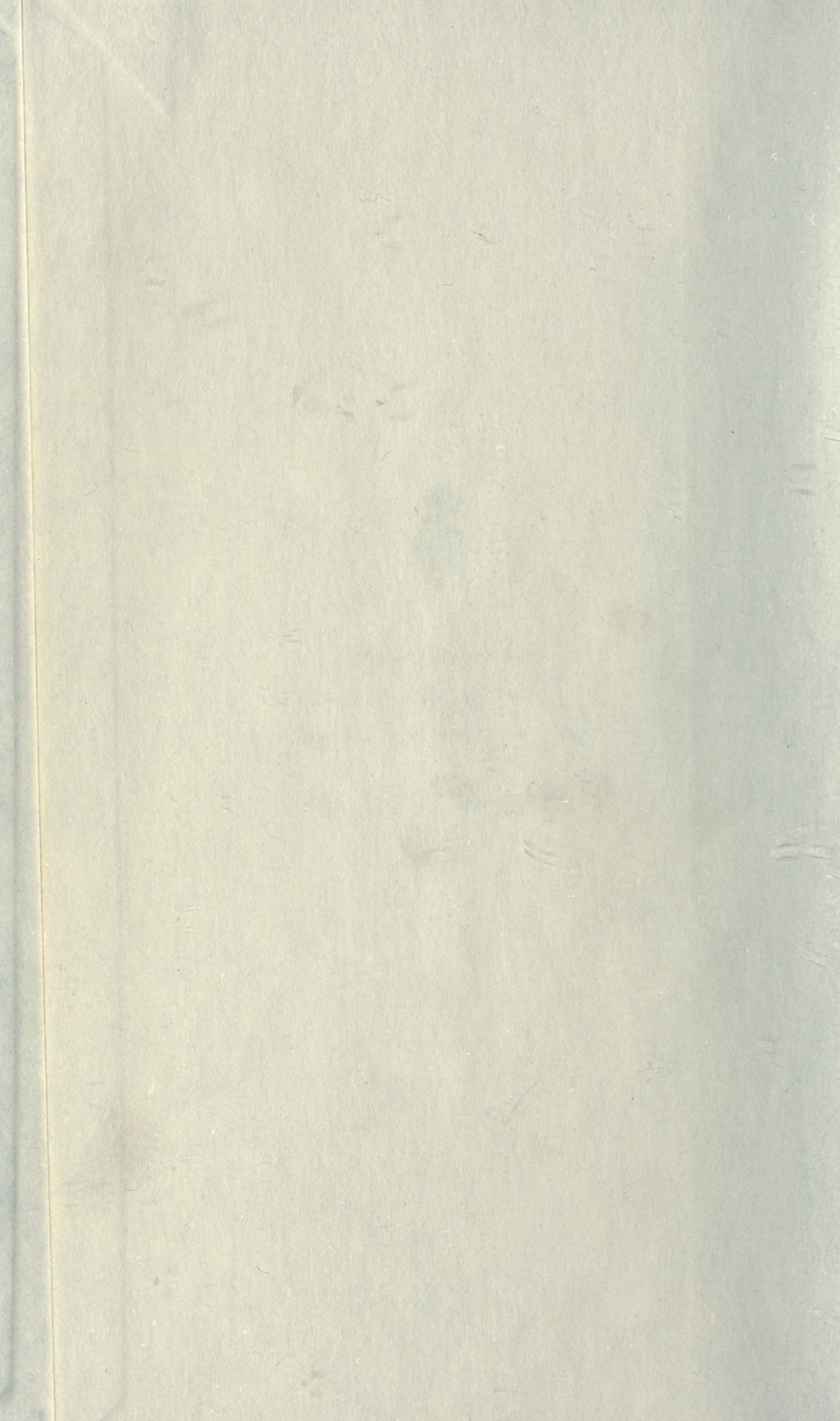
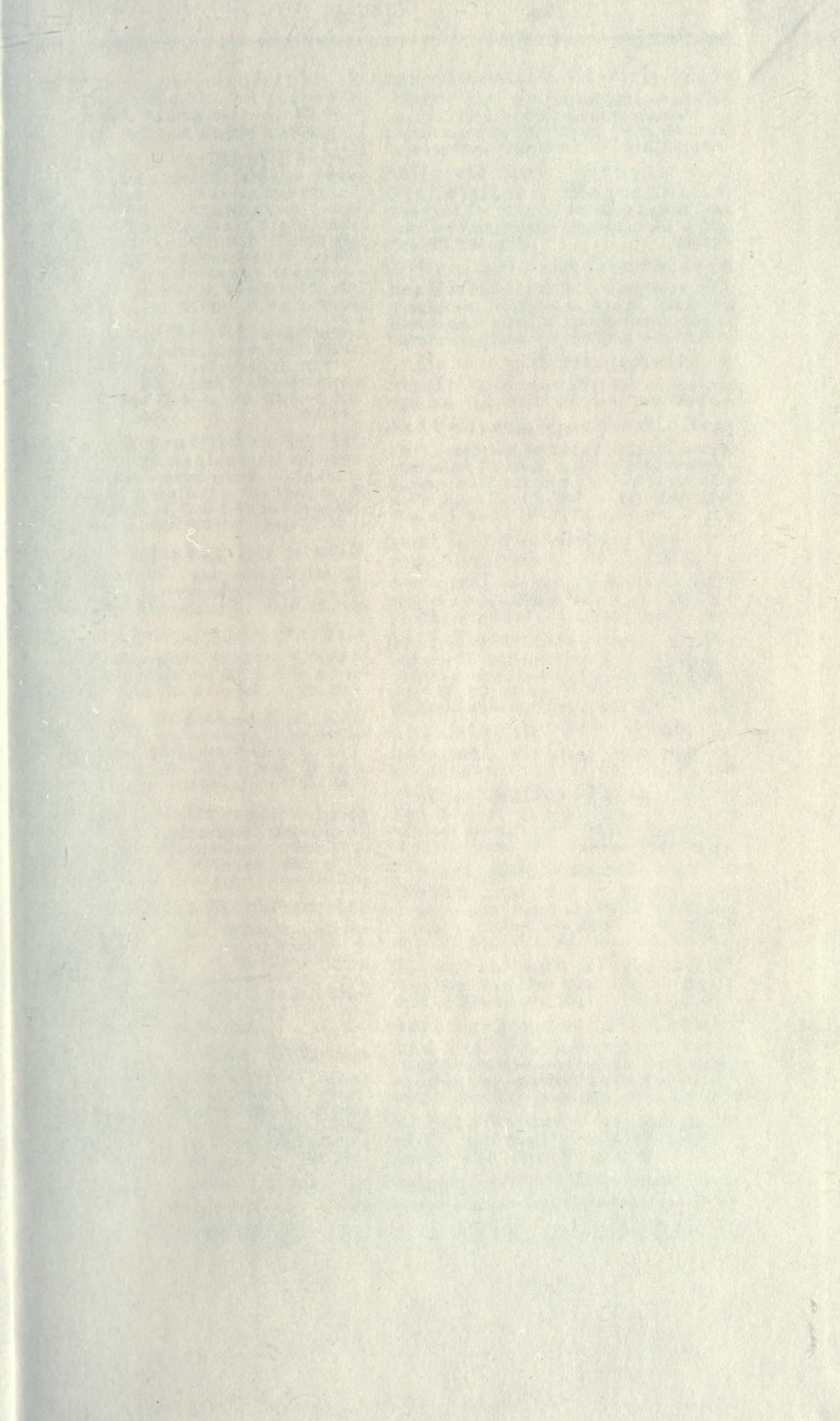
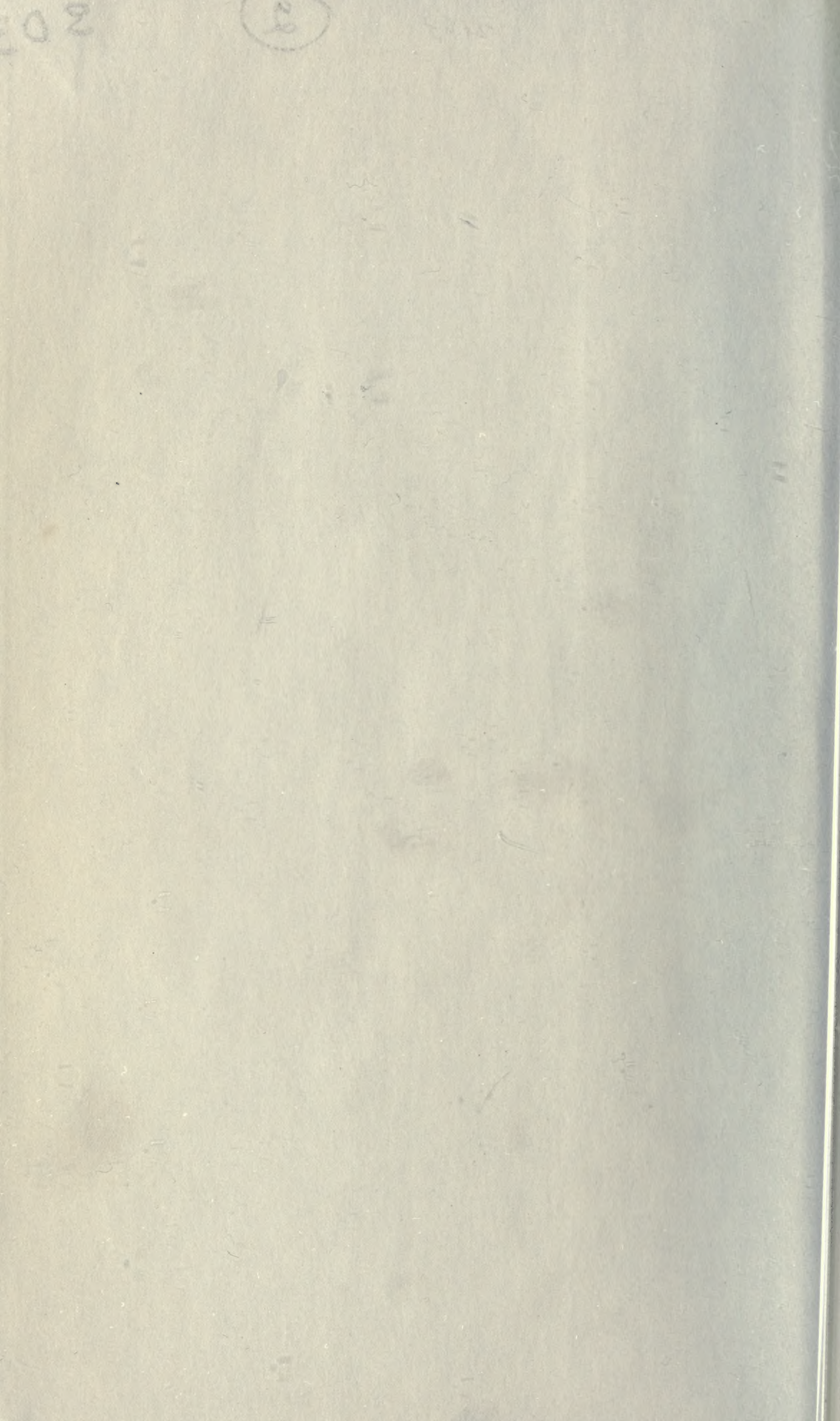


UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01187492 2









THEORIE DER ELEKTRIZITÄT

VNO

DR. M. ABRAHAM

ERSTER BAND: EINFÜHRUNG IN DIE MAXWELLSCHE THEORIE DER ELEKTRIZITÄT

MIT EINEM EINLEITENDEN ABSCHNITTE ÜBER DAS RECHNEN MIT VEKTORGRÖSSEN IN DER PHYSIK

VON

DR. A. FÖPPL

FÜNFTE, UMGEARBEITETE AUFLAGE

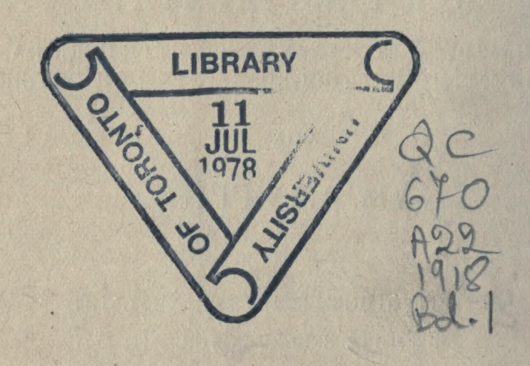
HERAUSGEGEBEN VON

DR. M. ABRAHAM

MIT 11 FIGUREN IM TEXT



ERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN 1918


LIBRARY
11
JUL
1978
OF TORONTO
UNIVERSITY

Vorwort zur ersten Auflage.

Der Kreis der überzeugten Anhänger der Maxwellschen Elektrizitätslehre setzte sich bis vor einigen Jahren fast ausschließlich aus englischen Physikern zusammen. Schon früher schenkte man zwar auch auf deutschem Boden dieser Theorie große Beachtung; man war aber noch zu sehr in dem Banne der Fernwirkungslehre befangen, um sich vollständig in sie einleben zu können. Anfänglich richteten sich daher die Bestrebungen unserer Physiker vorwiegend dahin, eine Versöhnung beider Theorien herbeizuführen und womöglich ein allgemeines Schema aufzustellen, das beide als Spezialfälle in sich faßte. Eine andere Folge davon war, daß man sich zuerst und am meisten mit jener Seite der Maxwellschen Lehre befreundete, die von der Ableitung der Gleichungen des elektromagnetischen Feldes aus den allgemeinen Prinzipien der Mechanik handelt. Denn der Ideengang, der dieser zugrunde liegt, ist seinem Wesen nach eng verwandt mit den älteren Untersuchungsmethoden, bei denen der Potentialbegriff die entscheidende Rolle spielte.

Alle Bemühungen, die Faraday-Maxwellsche Anschauung in den früheren Vorstellungskreis einzugliedern, ohne von diesem erhebliche Opfer zu bringen, mußten indessen in letzter Linie an den Verschiebungsströmen im freien Äther und an der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen scheitern. Kaum hatte daher Hertz diese Folgerung der Maxwellschen Theorie durch seine entscheidenden Versuche bestätigt, als er sich sofort dieser grundsätzlich zuwandte, nachdem er sich schon früher sehr mit ihr befreundet hatte.

Damit war der Wendepunkt gekommen. Heute denkt man kaum noch daran, in der Richtung des Weberschen Elementargesetzes weiterzuarbeiten, dessen Formulierung einst den Höhepunkt der Entwicklung der älteren Vorstellungen gebildet hatte. Nachdem sich schon auf Grund der älteren Theorie die Unhaltbarkeit dieses Gesetzes definitiv herausgestellt hatte und sich kein Ersatz dafür finden ließ, war die Leistungsfähigkeit der Fernwirkungstheorie erschöpft, und ihre Unzulänglichkeit trat immer mehr zutage. Dadurch war der

Boden für die Aufnahme einer grundsätzlich von jener verschiedenen Lehre wohl vorbereitet, und unter dem Eindrucke der Hertzschen Entdeckungen konnte sich der Umschwung der Meinungen daher mit ungewöhnlicher Schnelligkeit vollziehen.

So kam es, daß man heute der Maxwellschen Lehre überall das lebhafteste Interesse entgegenbringt. Nicht nur der Physiker von Fach, der Lehrer und der Studierende der Physik, sondern namentlich auch der wissenschaftlich gebildete Elektrotechniker sucht sich mit den Grundzügen dieser Theorie bekannt zu machen, in der man heute mit großer Wahrscheinlichkeit die bleibende Grundlage jeder physikalischen Forschung auf diesem Gebiete erblicken darf.

Hiermit entstand auch das Bedürfnis nach einer möglichst allgemeinverständlichen, dabei aber doch wissenschaftlich strengen Darstellung der Maxwellschen Theorie. Denn das Maxwellsche Originalwerk, das als Hauptquelle zur Verfügung stand, stellt nicht nur ziemlich hohe Anforderungen an die mathematische Vorbildung und vielfach auch an die Geduld des Lesers, sondern es enthält, wie ja den Umständen nach gar nicht anders zu erwarten, auch manche Irrtümer, die inzwischen berichtigt sind, und es schlägt viele Umwege ein, die seitdem abgekürzt wurden.

An mathematischen Vorkenntnissen setzte ich bei dem Leser, um mich an einen möglichst weiten Kreis wenden zu können, nur die sichere Beherrschung der Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung voraus. Ich hoffe mit Zuversicht, daß meine Darstellung keinem Leser, der mit diesen genügend vertraut ist, besondere Schwierigkeiten bereiten wird. Bei der mathematischen Fassung der vorgetragenen Lehren habe ich mich allerdings überall der Bezeichnungen und Methoden des Vektorkalküls bedient; im ersten Abschnitte sind diese aber, soweit als sie gebraucht werden, in sehr einfacher und, wie ich unbedingt annehmen darf, auch sehr leicht verständlicher Weise erörtert.

Ich empfehle dem Leser, zunächst den ersten Abschnitt durchzusehen: er wird dort vieles finden, was ihm ohne weiteres vollkommen klar ist. Über das andere möge er zunächst hinweggehen und sofort mit dem Studium der folgenden Abschnitte beginnen. Bei Gelegenheit der Rückverweisungen auf die im ersten Abschnitte entwickelten Rechengesetze wird es dann schon von selbst darauf geführt werden, die vorher überschlagenen Entwicklungen aufs neue in Erwägung zu ziehen, und an der Hand der konkreten Anwendungen,

die davon gemacht werden sollen, wird er sich mit weit leichterer Mühe darin zurechtfinden, als wenn die mathematischen Lehren losgelöst von diesen bewältigt werden müßten.

Im übrigen habe ich es mir zur Aufgabe gemacht, eine größere Häufung von Formeln (abgesehen natürlich von der mathematischen Einleitung) tunlichst zu vermeiden und lieber mehr Text zur Wiedergabe meines Gedankenganges zu verwenden. Dieses Bestreben hat natürlich seine Grenzen, die durch die Rücksicht auf den präzisen Ausdruck gesteckt sind. Es wird aber ganz besonders unterstützt durch den Gebrauch der Vektorengleichungen, die in ihrer einfachen Gliederung fast wie abgekürzte Sätze des Textes gelesen werden können.

In der Tat gewinnt die Behandlung der Elektrizitätslehre so ungemein an Klarheit und Durchsichtigkeit durch die Einführung der Vektorgrößen selbst an Stelle ihrer Komponenten, daß es im ganzen entschieden weniger Anstrengung erfordern dürfte, sich zuerst mit den wenigen Rechengesetzen, um die es sich dabei handelt, vertraut zu machen, und dann noch die Elektrizitätslehre durchzunehmen, als wenn man diese allein mit Hilfe der gewohnten Cartesischen Darstellungsmethode studiert. Die auf das Studium der Vektoranalysis zu verwendende Mühe wird daher sofort durch einen entsprechenden Gewinn reichlich belohnt, und außerdem erzielt man damit den dauernden Vorteil, sich mit jener analytischen Darstellungsform geometrischer Beziehungen vertraut zu machen, die zweifellos die mathematische Zeichensprache der Physik der Zukunft sein wird.

Neuerdings bedienen sich die englischen Physiker, nach dem Vorgange von Heaviside, mit großem Vorteile fetter Lettern zur Kennzeichnung der Vektorgrößen. Ich nahm diesen wichtigen Vorteil gleichfalls wahr, bediente mich aber außerdem, so wie Maxwell selbst, der Frakturbuchstaben für die Vektoren. Ich halte es für einen Nachteil, daß man in England hiervon abgegangen ist, weil dieses Kennzeichen auch in der Handschrift bestehen bleibt, in der man mit fetten Lettern u. dgl. nicht operieren kann.

Der Verlagsbuchhandlung spreche ich meinen Dank und meine Anerkennung für die sorgfältige und gefällige Herstellung des Druckes aus. Schon in ihrem Interesse wünsche ich diesem Buche neben dem wissenschaftlichen — an dem mir natürlich am meisten gelegen ist — auch einen geschäftlichen Erfolg.

Leipzig, im April 1894.

A. Föppl.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Der vom Verfasser der ersten Auflage ausgesprochene Wunsch hat sich erfüllt. Seine „Einführung in die Maxwellsche Theorie" hat sich viele Freunde erworben und ist der Verbreitung der Maxwellschen Ideen in Deutschland recht förderlich gewesen.

Die notwendig gewordene Neuauflage glaubte Herr Professor A. Föppl nicht selbst übernehmen zu sollen. Seine Tätigkeit auf dem Gebiete der technischen Mechanik hat ihn zu sehr von der Beschäftigung mit der Elektrizitätstheorie abgezogen; dieses war auch der Grund, daß der von ihm geplante zweite Teil des Werkes nicht erschienen ist.

Der Aufforderung, die Bearbeitung der zweiten Auflage zu übernehmen, leistete ich gern Folge. Denn ich bin der Überzeugung, daß ein Buch von der Eigenart des Föpplschen auch heute nicht entbehrlich ist. An dem weiteren Ausbau der Elektrizitätstheorie selbst teilnehmend, hegte ich andererseits schon früher die Absicht, dieser Theorie ein die Fortschritte des letzten Jahrzehntes umfassendes Werk zu widmen. Dem vorliegenden ersten Bande der „Theorie der Elektrizität", der gleichzeitig die umgearbeitete Neuauflage der „Einführung in die Maxwellsche Theorie" darstellt, beabsichtige ich demgemäß einen zweiten Band folgen zu lassen, welcher die „Theorie der elektromagnetischen Strahlung" behandeln soll. Ihm ist die atomistische Weiterbildung der Maxwellschen Theorie vorbehalten, die zur Lorentzschen Elektronentheorie führt, ferner die ausführlichere und strengere Theorie der Licht- und Wärmestrahlung, der Hertzschen Schwingungen und der drahtlosen Telegraphie. Beide Bände zusammen sollen eine Übersicht über die wichtigsten Teile der modernen Theorie der Elektrizität geben.

Die Grundvorstellungen der Maxwellschen Theorie sind heute wohl von allen produktiv arbeitenden Physikern angenommen. Diese Vorstellungen bilden die Grundlage jeder Elektrizitätstheorie. Der Kampf zwischen Nahewirkungstheorie und Fernwirkungstheorie der Elektrodynamik ist entschieden. Heute steht eine andere Frage zur Diskussion, nämlich die, ob die Weiterbildung und Spezialisierung der Nahewirkungstheorie, welche die Elektronentheorie anstrebt, geeignet ist, ein allseitig getreues Bild der Tatsachen zu geben. Ich habe geglaubt, die Erörterung dieser Frage dem zweiten Bande zuweisen zu sollen, und bin in dem vorliegenden ersten Bande auf dem Maxwell-

Hertzschen Standpunkte stehen geblieben. Ich bin in der Tat der Überzeugung, daß man, um die Elektronentheorie gründlich zu studieren, zunächst die Maxwellsche Theorie kennen lernen muß. Das Verhältnis dieser beiden Theorien ist ein ähnliches wie das der Molekulartheorie und der allgemeinen Mechanik. Die allgemeine Mechanik behandelt die mechanischen Eigenschaften der Körper ohne Heranziehung molekularer Hypothesen. Sie schließt solche Hypothesen indessen keineswegs aus, sondern läßt deren nachträgliche Einführung zu. Ähnlich läßt die Maxwellsche Theorie der atomistischen Weiterbildung freien Raum. Andererseits hat man, wenn man irgendeine Kraft, z. B. den Gasdruck, durch Bewegungen der Moleküle erklären will, diese Bewegungen nach den Methoden der allgemeinen Mechanik zu behandeln. Dementsprechend sind die Bewegungen der elektrischen Atome auf Grund der Feldgleichungen der Maxwellschen Theorie zu bestimmen. Das Studium der Maxwellschen Theorie muß daher unbedingt dem Studium der Elektronentheorie vorangehen, ebenso wie das Studium der Mechanik dem der kinetischen Gastheorie.

Die allgemeine Anlage des vorliegenden Bandes wurde in der Neuauflage beibehalten. Die Theorie der Vektoren und der Vektorfelder wurde auch hier an die Spitze gestellt; sie wurde durch Einfügung der Theorie des Vektorpotentiales, der Umrechnung auf bewegte Bezugssysteme u. a. ergänzt, so daß man nach der Lektüre des ersten Abschnittes über die Begriffe der Vektortheorie frei verfügen kann und Schwierigkeiten rein mathematischer Art weiterhin dem Verständnis nicht begegnen. Auch sind in den ersten Abschnitt Sätze der Mechanik starrer Körper und der Hydrodynamik eingearbeitet worden, die in späteren Abschnitten des Werkes zur Verwendung gelangen. Sie dienen gleichzeitig zur Erläuterung der angewandten Symbolik, die durch ihre jede unnütze Weitschweifigkeit vermeidende Kürze der klaren Formulierung der physikalischen Begriffe so förderlich ist.

Der zweite Abschnitt ist dem elektrischen Felde gewidmet. Im dritten Abschnitte treten die magnetischen Vektoren hinzu. Diese werden zuerst in Verbindung mit den elektrischen Strömen eingeführt, der Vektor $\mathfrak{B}$ der magnetischen Induktion wird durch die induktive Wirkung auf eine Probespule definiert. So wird sein Name und seine quellenfreie Verteilung ohne weiteres verständlich. Vor der historisch überlieferten Anlehnung der Theorie des magnetischen Feldes an die Wirkungen auf permanente Magnete besitzt diese Einführung der

magnetischen Vektoren den Vorzug, daß sie die Theorie auf gut verstandene Vorgänge gründet. Die an permanenten Magneten beobachteten Wirkungen sind weit weniger aufgeklärt, sie werden erst im vierten Abschnitte behandelt.

Ich habe mich bemüht, die allgemeinen Gleichungen durch Anwendung auf konkrete, möglichst einfach gewählte Fälle zu erläutern. So habe ich im dritten Abschnitte die Theorie der Versuche von E. Hagen und O. Rubens über die Reflexion langwelliger Wärmestrahlen durch Metalle entwickelt, die eine so willkommene Bestätigung der Maxwellschen Feldgleichungen ergeben haben. Auch den elektrischen Drahtwellen werden einige Paragraphen gewidmet.

Wo die Elektronentheorie zu einer Modifikation der Maxwell-Hertzschen Vorstellungen geführt hat, wird dieses angedeutet und so die Brücke zu den ausführlicheren Darlegungen des zweiten Bandes geschlagen.

Von Quellenangaben mußte natürlich auch in der neuen Auflage im allgemeinen abgesehen werden. Man wird dieses um so eher entschuldigen, als in den betreffenden Artikeln der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften eine brauchbare Literaturübersicht zur Verfügung steht. Ich habe mich nach Möglichkeit an die Schreibweise der Enzyklopädie angeschlossen; so habe ich z. B. die eckige Klammer als Zeichen des Vektorproduktes gewählt.

Ich hoffe, daß diese Neuauflage dem Buche neue Freunde erwerben wird. Andererseits glaube ich doch, trotz der vorgenommenen Umarbeitung, dem Werke die Eigenart gewahrt und so die alten Freunde erhalten zu haben.

Cambridge, im Juli 1904.

M. Abraham.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die Zahl der Physiker, Techniker und Mathematiker, welche der Maxwellschen Theorie Interesse entgegenbringen, wächst von Jahr zu Jahr; so wurde denn bereits nach kurzer Frist wiederum eine neue Auflage der „Einführung in die Maxwellsche Theorie“ notwendig.

Den Rahmen dieses Bandes zu erweitern, erschien mir nicht notwendig. Doch wurden hier und da Änderungen in der Anordnung des Stoffes und im Texte angebracht, in der Absicht, die Lektüre des

Buches möglichst zu erleichtern. In dieser Hinsicht bin ich insbesondere den Herren Dr. C. H. Müller und Privatdozent Dr. C. Carathéodory, die mich beim Lesen der Korrekturen in liebenswürdiger Weise unterstützt haben, für ihre Ratschläge zu Dank verpflichtet.

Am Schlusse dieses Bandes ist in der neuen Auflage ein besonderes Register beigefügt.

Göttingen, im Juli 1907.

M. Abraham.

Vorwort zur vierten Auflage.

In dieser Auflage sind verschiedene Änderungen vorgenommen.

Die Anwendungen der Vektorrechnung auf die Mechanik sind kürzer gefaßt, so daß die im ersten Kapitel gegebene Einführung in die Theorie der Vektoren und der Vektorfelder nur das für das Verständnis der Theorie der Elektrizität Notwendige enthält.

Die mechanischen Kräfte und die fiktiven Spannungen im elektrischen und magnetischen Felde sind ausführlicher behandelt (§§ 44, 45, 58).

Die Theorie der elektrischen Wellen ist ergänzt durch Behandlung des skin-Effektes (§ 78), der Hertzschen Lösung (§ 79) und deren Anwendung auf die drahtlose Telegraphie (§ 80).

Im letzten Kapitel ist die Elektrodynamik bewegter Körper nur so weit zur Darstellung gelangt, als dies möglich ist, ohne die neueren Theorien heranzuziehen, deren Diskussion dem zweiten Bande vorbehalten sein soll. Doch sind die Induktionsvorgänge in bewegten Körpern, soweit sie für die Elektrotechnik von Wichtigkeit sind, erörtert.

Rationelle Einheiten einzuführen, was jetzt häufig in rein theoretischen Abhandlungen geschieht, habe ich mich nicht entschließen können; die Berechnung von Zahlwerten wird dann zu unbequem. Doch habe ich die Definition des Vektors $\mathfrak{D}$ der elektrischen Verschiebung geändert, indem ich setze

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} \qquad \text{statt} \qquad \mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E};$$

dann wird der Verschiebungsstrom

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \qquad \text{statt} \qquad \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t},$$

so daß aus der ersten Hauptgleichung für Isolatoren das 4π heraus-

fällt; diese entspricht dann durchaus der zweiten, der Vektor $\mathfrak{D}$ entspricht ganz dem Vektor $\mathfrak{B}$ der magnetischen Induktion.

Zu besonderem Danke bin ich Herrn F. Emde verpflichtet für seine Ratschläge, die darauf hinzielten, Rudimente älterer Theorien, die zur Maxwellschen Theorie nicht passen, auszumerzen.

Mailand, im März 1911.

M. Abraham.

Vorwort zur fünften Auflage.

In der fünften Auflage des ersten Bandes habe ich nur geringfügige Änderungen vorgenommen, so daß sich auch an sie die vor zwei Jahren erschienene dritte Auflage des zweiten Bandes der „Theorie der Elektrizität" anschließt.

Zürich, im Januar 1917.

M. Abraham.

Inhaltsverzeichnis.

Zweiter Abschnitt.

Das elektrische Feld.

Erstes Kapitel.

Das elektrostatische Feld im Luftraume.

Zweites Kapitel.

Dielektrika.

Drittes Kapitel.

Die Energie und die mechanischen Kräfte des elektrostatischen Feldes.

Viertes Kapitel.

Der elektrische Strom.

Dritter Abschnitt.

Das elektromagnetische Feld.

Erstes Kapitel.

Die magnetischen Vektoren.

Zweites Kapitel.

Elektrodynamik quasistationärer Ströme.

Drittes Kapitel.

Elektromagnetische Wellen.

Vierter Abschnitt.

Weiterer Ausbau der Theorie.

Erstes Kapitel.

Die ferromagnetischen Körper.

Zweites Kapitel.

Induktionserscheinungen in bewegten Körpern.

Einleitung.

Die Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen gründete sich bis zum Auftreten Maxwells auf die Vorstellung von Fernwirkungen zwischen elektrisierten, magnetisierten oder von elektrischen Strömen durchflossenen Körpern. Nur die Anschauungen Faradays wichen in dieser Hinsicht von denen aller anderen Physiker ab. Faraday war aber nicht genug Mathematiker, um seiner Auffassung eine nach allen Seiten erschöpfende und widerspruchsfreie Form zu geben, die sie zum Range einer Theorie erhoben hätte; obschon auch seine Art, die elektrischen Erscheinungen aufzufassen und zu beschreiben, eine mathematische war, ohne daß er sich der gewöhnlichen mathematischen Zeichensprache bedient hätte. Erst Maxwell gelang dies, und er schuf, indem er die Ideen Faradays in strenge mathematische Formen brachte, ein Lehrgebäude, das schon in der Anlage von der Fernwirkungstheorie wesentlich verschieden war, bei seinem weiteren Ausbau aber sich immer weiter von dieser entfernte.

Die Entdeckungen von Heinrich Hertz erbrachten den Nachweis, daß sich in der Tat im Dielektrikum, insbesondere im luftleeren Raume, elektromagnetische Vorgänge abspielen. Seitdem sind die Grundvorstellungen der Maxwellschen Theorie wohl von allen Physikern angenommen worden. Welches sind nun die wesentlichen Kennzeichen, welche die Maxwellsche Nahewirkungstheorie von den Fernwirkungstheorien trennen?

Als wesentliche Grundgedanken der Maxwellschen Lehre werden wir die folgenden zu betrachten haben:

1. Die Vorstellung, daß alle elektrischen und magnetischen Einwirkungen eines Körpers auf einen von ihm getrennten anderen Körper durch die Vermittelung des dazwischen-

liegenden leeren oder von Materie erfüllten Raumes erfolgen.

2. Daß der Sitz der elektrischen bzw. magnetischen Energie nicht allein in den elektrisierten, magnetisierten oder elektrisch durchströmten Körpern zu suchen ist, sondern auch, und vielfach überwiegend, in dem umgebenden Felde.
3. Daß der elektrische Strom in einer ungeschlossenen Leitungsbahn durch einen im Dielektrikum anzunehmenden „Verschiebungsstrom“ zu einer geschlossenen Strömung ergänzt wird, und daß dieser Verschiebungsstrom in derselben Weise mit der magnetischen Feldstärke verknüpft ist wie der Leitungsstrom.
4. Daß der magnetische Induktionsfluß keine Quellen besitzt, oder mit anderen Worten, daß nirgends wahrer Magnetismus auftreten kann.
5. Daß die Lichtwellen elektromagnetische Wellen sind.
6. Die Betonung der Analogie der mechanischen und der elektromagnetischen Vorgänge, die in der Ableitung der elektromagnetischen Gleichungen aus den Grundgleichungen der Mechanik, etwa den Lagrangeschen, ihren Ausdruck findet.
7. Die Darstellung der Grundgesetze des Elektromagnetismus durch Gleichungen zwischen Vektoren.

Der zuletzt angeführte Punkt bezieht sich in gewissem Sinne nur auf eine Äußerlichkeit; trotzdem ist seine Bedeutung nicht zu unterschätzen. Maxwell selbst hat die Darstellung der Gleichungen nach der Quaternionentheorie nur mehr nebenbei gegeben; in der Hauptsache bedient er sich der Cartesischen Darstellungsweise. In dieser läßt sich aber weit schwieriger eine Übersicht über den Zusammenhang aller Formeln gewinnen. Diese wird durch Verwendung der Vektorrechnung sehr erleichtert. Die Mühe, die es kostet, sich mit dieser vertraut zu machen, wird durch die Vorteile, die sich daraus ergeben, reichlich aufgewogen. Es ist in der Tat die einzige Methode, die sich den Erfordernissen der Aufgabe willig an-

paßt, wenn es sich darum handelt, die Faradaysche Idee des Kraftflusses möglichst getreu wiederzugeben. Wir stellen daher die Theorie der Vektoren und der Vektorfelder an die Spitze des Werkes. Die gegebene Darstellungsweise ist als ein Kompromiß der Graßmannschen Ausdehnungslehre und der Hamiltonschen Quaternionentheorie zu bezeichnen; sie ist von O. Heaviside und W. Gibbs befürwortet worden und wird jetzt von nahezu allen auf dem Gebiete der Elektrodynamik arbeitenden Forschern angewandt. Dieser Darstellungsmethode, die auch in der Mechanik starrer Körper und in der Hydrodynamik von Nutzen ist, werden wir uns in den folgenden Abschnitten durchweg bedienen.

Erster Abschnitt.

Vektoren und Vektorfelder.

Erstes Kapitel.

Die Vektoren.

§ 1. Definition des Vektors.

Unter den Größen, die zur mathematischen Darstellung geometrischer Gebilde oder physikalischer Zustände und Vorgänge dienen, zeichnen sich durch ihre Einfachheit die sogenannten Skalaren aus. Eine Größe wird Skalar genannt, wenn die Gesamtheit der verschiedenen Werte, die sie annehmen kann, in stetiger, umkehrbar eindeutiger Weise einer Reihe reeller Zahlen zuzuordnen ist. Die Forderung der umkehrbar eindeutigen Zuordnung besagt, daß nach Festsetzung der Maßeinheit die Gleichheit zweier Werte der Größe an der Gleichheit der Maßzahlen, die Forderung der Stetigkeit, daß die näherungsweise Gleichheit der Werte an der näherungsweisen Gleichheit der Maßzahlen erkennbar sein soll. Es gibt Skalare, z. B. Masse, Volumen, Dichte, deren Maßzahlen stets positiv sind; andere, z. B. Potential, Elektrizitätsmenge, sind sowohl positiver wie negativer Werte fähig.

In manchen Zweigen der Physik pflegt man die Maßeinheiten auf die drei Grundeinheiten der Länge, Masse und Zeit zu beziehen; die Dimension einer Größe in einem solchen „absoluten Maßsystem" drückt die Maßeinheit durch die Grundeinheiten aus. Ob man nun jene drei Grundeinheiten oder andere dem Dimensionssystem zugrunde legt, darüber mag zunächst keine Festsetzung getroffen werden. Jedenfalls müssen in einer Gleichung stets die beiderseits stehenden Größen nicht nur der Maßzahl, sondern auch der Dimension nach gleich sein; Verschiedenheit

der Dimension würde nämlich bedingen, daß bei einer Änderung der Grundeinheiten die Gleichheit der Maßzahlen fortfiele.

Es gibt geometrische und physikalische Größen, die nicht zur Klasse der Skalaren gehören. So ist die Gesamtheit der geradlinigen Verrückungen, die einen beweglichen Punkt aus einer bestimmten Anfangslage in eine beliebige Endlage überführen, keineswegs in umkehrbar eindeutiger und stetiger Weise einer Reihe reeller Zahlen zuzuordnen; zur eindeutigen Festlegung der Endlage sind vielmehr drei Zahlangaben notwendig; denn eine Zahlangabe ist erforderlich, um den Betrag der Verrückung zu bestimmen, d. h. den Abstand von Anfangslage und Endlage, zwei weitere zur Bestimmung der Richtung und des Sinnes der Verrückung. Die Verrückung eines Punktes repräsentiert eine Klasse von Größen, die man als *Vektoren* bezeichnet.

Wir nennen eine physikalische Größe einen Vektor, wenn die Gesamtheit der verschiedenen Werte, die sie annehmen kann, in umkehrbar eindeutiger und stetiger Weise der Gesamtheit der geradlinigen Verrückungen zuzuordnen ist, welche einen Punkt aus einer festen Anfangslage in eine beliebige Endlage überführen, und wenn für die Addition zweier gleichartiger Größen dasselbe Gesetz gilt wie für die Zusammensetzung der ihnen zugeordneten Verrückungen (vgl. § 2).

Jedem Vektor kommt eine bestimmte Dimension zu; zwei Vektoren werden als gleich nur dann zu bezeichnen sein, wenn nicht nur die sie darstellenden Verrückungen, sondern auch die Dimensionen gleich sind.

Jedem Vektor kann ein Skalar zugeordnet werden, der dem Betrage der ihn darstellenden Verrückung entspricht. Wir nennen diesen Skalar „*Betrag des Vektors*“ und schreiben ihm die Dimension des Vektors selbst zu.

Zur Kennzeichnung der Vektoren sind in dieser Schrift ein für allemal fett gedruckte gotische Buchstaben angewendet, während die lateinischen und griechischen Lettern zur Bezeichnung von Skalaren dienen. So bezeichnet $\mathfrak{B}$ einen Vektor; sein Betrag wird durch $|\mathfrak{B}|$ dargestellt.

§ 2. Addition und Subtraktion von Vektoren.

Es wurde soeben, bei der Definition des Vektors, die Vektoraddition auf die Zusammensetzung geradliniger Verrückungen zurückgeführt. Wir betrachten nun zwei Vektoren derselben Dimension und Art (vgl. § 7), $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; um sie zu addieren, denken wir uns einen beweglichen Punkt, der sich anfangs an der Stelle 1 befindet (Fig. 1). Diesem Punkte werde zuerst eine Verrückung (1, 2) erteilt, die nach Betrag, Richtung und Sinn den Vektor $\mathfrak{A}$ darstellt; hierauf werde der Punkt, von der Stelle 2 aus, um die Strecke (2, 3) verschoben, die nach Länge, Richtung und Sinn mit dem Vektor $\mathfrak{B}$ übereinstimmt; das Ergebnis ist eine Verschiebung des beweglichen Punktes von 1 nach 3. Die geradlinige Verrückung nun, die direkt von 1 nach 3 führt, heißt Resultante oder geometrische Summe der beiden Verrückungen (1, 2) und (2, 3). Sie stellt einen Vektor $\mathfrak{C}$ dar, der, gemäß der Definition des § 1, als Resultante oder Summe der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu bezeichnen ist:

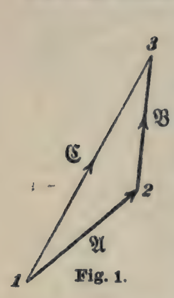


Fig. 1.

$$(1) \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

Führt man zuerst die Verrückung $\mathfrak{B}$ und darauf die Verrückung $\mathfrak{A}$ aus, so beschreibt der bewegliche Punkt den Weg (143), welcher den Weg (123) zu einem Parallelogramm ergänzt; die Resultante der Verrückungen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ wird demnach, ebenso wie diejenige der Verrückungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, durch die Diagonale (1, 3) jenes Parallelogramms dargestellt (vgl. Fig. 2). Es befolgt daher die Vektoraddition das kommutative Gesetz: Die geometrische Summe zweier Vektoren ist unabhängig von der Reihenfolge der Summanden:

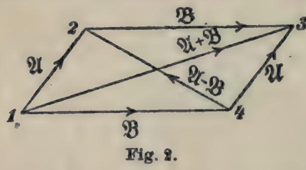


Fig. 2.

$$(2) \qquad \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}.$$

Das durch Fig. 2 dargestellte Parallelogrammgesetz der Addition kennzeichnet diejenigen Größen, die wir Vektoren nennen.

Es gibt Größen, denen man Betrag, Richtung und Sinn zuordnen kann, und die dennoch nicht in dem hier festgesetzten Sinn als Vektoren zu bezeichnen sind, weil ihre Zusammensetzung einem anderen Gesetze folgt. So sind zwar, wie aus der Kinematik bekannt ist, unendlich kleine Drehungen eines starren Systems um einen festen Punkt durch Vektoren darzustellen, weil die Zusammensetzung solcher Drehungen dem Parallelogrammgesetze gehorcht. Hingegen sind endliche Drehungen, weil sie sich in verwickelterer Weise zusammensetzen, nicht als Vektoren zu betrachten. — Wie die Statik lehrt, folgen die an einem materiellen Punkte angreifenden Kräfte dem Parallelogrammgesetz der Addition; solche Kräfte sind also Vektoren.

Es mögen jetzt drei Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gegeben sein. Zu der Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, die durch die geradlinige Verrückung (1, 3) dargestellt wird (Fig. 3), addiere man den Vektor $\mathfrak{C}$, dem sich die geradlinige Verrückung (3, 4) zuordnet. Die Resultante ist eine Verrückung von 1 nach 4; dieselbe Resultante erhält man, wenn man den beweglichen Punkt zuerst von 1 nach 2, und dann direkt von 2 nach 4 verschiebt, d. h. wenn man die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ addiert. So überzeugt man sich von der Gültigkeit des *assoziativen Gesetzes der Vektoraddition*:

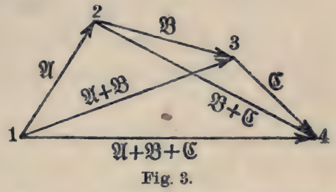


Fig. 3.

(3) $$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}).$$

Wie in Fig. 3 die Summe von drei Vektoren durch Zeichnung des Vierecks gefunden wurde, welches die Summanden und die Summe zu Seiten hat, so dient zur Bildung der Summe von n Vektoren das sogenannte Vektorpolygon; dasselbe hat $n + 1$ Seiten, nämlich die n zu summierenden Vektoren, und deren Resultante.

Welche Bedeutung soll nun der *geometrischen Differenz* zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beigelegt werden? Die Differenz soll so definiert werden, daß für Vektoren, ebenso wie für Skalare, die Beziehung gilt:

(4) $$\mathfrak{B} - \mathfrak{B} = 0.$$

Demgemäß ordnet man dem Vektor $-\mathfrak{B}$ eine Verrückung zu, welche die Verrückung $\mathfrak{B}$ aufhebt, indem sie den beweglichen Punkt zur Anfangslage zurückführt, d. h. eine Verrückung von gleichem Betrage und gleicher Richtung wie $\mathfrak{B}$, aber von entgegengesetztem Sinne. Unter der geometrischen Differenz der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ versteht man die geometrische Summe der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{B}$, und definiert dementsprechend die Vektorsubtraktion folgendermaßen: Von einem Vektor $\mathfrak{A}$ wird ein Vektor $\mathfrak{B}$ subtrahiert, indem man zu $\mathfrak{A}$ einen Vektor von gleichem Betrage und gleicher Richtung wie $\mathfrak{B}$, aber von entgegengesetztem Sinne, addiert.

In dem Parallelogramm der Fig. 2 stellt die Diagonale (13) die geometrische Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, die Diagonale (42) die geometrische Differenz $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ vor.

Die vorstehend entwickelten Regeln der Addition und Subtraktion von Vektoren stimmen formal mit den Gesetzen der gewöhnlichen Algebra überein.

§ 3. Einheitsvektoren und Grundvektoren, Komponenten.

Welche Bedeutung hat das Produkt aus einem Skalar α und einem Vektor $\mathfrak{a}$? Unter

$$\mathfrak{A} = \alpha\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\alpha \tag{5}$$

versteht man einen Vektor, dessen Betrag gleich dem Produkt der Beträge des Skalars α und des Vektors $\mathfrak{a}$ ist:

$$|\mathfrak{A}| = |\alpha| \cdot |\mathfrak{a}|, \tag{5a}$$

dem ferner die gleiche Richtung zukommt wie $\mathfrak{a}$ und gleicher oder entgegengesetzter Sinn, je nachdem der Skalar α positiv oder negativ ist.

Die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren befolgt die Regeln der Algebra skalarer Größen; das kommutative Gesetz ist durch (5) bereits zum Ausdruck gebracht. Es gilt auch das distributive Gesetz, d. h.

$$(\alpha + \beta)\mathfrak{a} = \alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{a}, \qquad \alpha(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \alpha\mathfrak{a} + \alpha\mathfrak{b}. \tag{5b}$$

Alle Vektoren $\mathfrak{A}$, welche der Richtung nach übereinstimmen,

lassen sich auf einen, ebenfalls gleich gerichteten Vektor $\mathfrak{s}$, vom Betrage 1, beziehen:

$$\mathfrak{A} = \pm |\mathfrak{A}| \mathfrak{s}; \tag{6}$$

hier gilt das positive oder das negative Vorzeichen, je nachdem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{s}$ gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben.

Ein Vektor $\mathfrak{s}$, dessen Betrag gleich 1 ist, wird Einheitsvektor genannt. Da wir in § 1 verabredet hatten, dem Betrage des Vektors dessen Dimension zuzuschreiben, so müssen wir dem Einheitsvektor $\mathfrak{s}$ in (6) die Dimension einer reinen Zahl beilegen. Man bedient sich der Einheitsvektoren, um Richtung und Sinn eines Vektors, oder mehrerer paralleler Vektoren, anzugeben.

Es sei nun (Fig. 4) ein fester Einheitsvektor $\mathfrak{s}$ gegeben und ein beliebiger Vektor $\mathfrak{a}$, der mit $\mathfrak{s}$ den Winkel φ bildet. Als Komponente von $\mathfrak{a}$ in bezug auf den Einheitsvektor $\mathfrak{s}$ bezeichnet man die Größe

$$|\mathfrak{a}| \cos \varphi;$$

Fig. 4.

dieselbe ist gleich der Länge der Projektion von $\mathfrak{a}$ auf die Gerade des Einheitsvektors $\mathfrak{s}$, mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen, je nachdem die Projektion dem Sinne nach mit $\mathfrak{s}$ übereinstimmt oder nicht.

Hiernach ist die Komponente eines Vektors eine skalare Größe; will man die Projektion von $\mathfrak{a}$ auf die Gerade des Einheitsvektors $\mathfrak{s}$ auch hinsichtlich der Richtung kennzeichnen, so muß man das Produkt aus der Komponente von $\mathfrak{a}$ in bezug auf $\mathfrak{s}$ und dem Einheitsvektor $\mathfrak{s}$ selber bilden:

$$|\mathfrak{a}| \cos \varphi \cdot \mathfrak{s}$$

stellt diese Projektion als Vektor dar. Entsprechend ihrer skalaren Natur wäre die Komponente von $\mathfrak{a}$ eigentlich mit einer lateinischen Letter zu bezeichnen, etwa mit a_s, und unter $\mathfrak{a}_s$ wäre das Produkt aus a_s und $\mathfrak{s}$ zu verstehen. Eine solche Bezeichnungsweise würde jedoch, neben den zur Bezeichnung von Vektoren dienenden gotischen Lettern, die entsprechenden lateinischen Lettern festlegen. Aus diesem praktischen Grunde ziehen wir es vor, im folgenden die gotische Letter, die den Vektor selbst kennzeichnet, auch für seine Komponenten zu verwenden;

der Index deutet den Einheitsvektor (oder die Achse) an, in bezug auf den die Komponente genommen ist; wir schreiben also für die Komponente von $\mathfrak{a}$ in bezug auf $\mathfrak{s}$:

$$\mathfrak{a}_s = |\mathfrak{a}| \cos \varphi. \tag{7}$$

Wir betrachten die Summe dreier Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}.$$

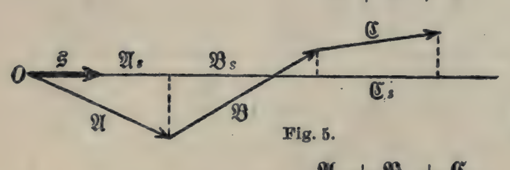


Fig. 5.

Wie aus Fig. 5 hervorgeht, ist ihre Komponente in bezug auf den Einheitsvektor $\mathfrak{s}$:

$$\mathfrak{A}_s + \mathfrak{B}_s + \mathfrak{C}_s,$$

d. h. gleich der algebraischen Summe der Komponenten der Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in bezug auf $\mathfrak{s}$. Dieses Ergebnis läßt sich auf eine beliebige Zahl von Vektoren übertragen und folgendermaßen aussprechen: Die Komponente der geometrischen Summe einer beliebigen Anzahl von Vektoren in bezug auf einen Einheitsvektor ist gleich der algebraischen Summe der entsprechenden Komponenten der einzelnen Vektoren.

Vektoren beliebiger Richtung und beliebigen Betrages kann man durch ihre Komponenten in bezug auf feste Einheitsvektoren kennzeichnen. Dazu bedarf es jedoch dreier nicht in einer Ebene liegender Einheitsvektoren. Wir wählen drei wechselseitig aufeinander senkrechte Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ als „Grundvektoren"; ihre Richtungen mögen mit den Achsen eines Cartesischen Koordinatensystems zusammenfallen.

Bekanntlich gibt es zwei Arten von Achsensystemen x, y, z, die man als Rechtssysteme und Linkssysteme unterscheidet; alle Rechtssysteme lassen sich miteinander zur Deckung bringen und ebenso alle Linkssysteme miteinander, aber nicht die Rechtssysteme mit den Linkssystemen. Durch Spiegelung an einer der Koordinatenebenen entsteht aus einem Rechtssystem ein Linkssystem, aus einem Linkssystem ein Rechtssystem. Auch durch Spiegelung am Anfangspunkt der Koordinaten (Umkehrung der drei Achsenrichtungen) wird aus einem Rechtssystem ein Linkssystem, aus einem Linkssystem ein Rechtssystem. Wir werden

uns weiterhin stets des von Maxwell gewählten Rechtssystemes bedienen.

Durch Fig. 6 wird dieses in axonometrischer Zeichnung zur Darstellung gebracht. Die xyz-Achsen, in die zugleich die Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ fallen, folgen so aufeinander, daß eine Drehung aus der x-Richtung in die y Richtung, verbunden mit einer fortschreitenden Bewegung in der z-Richtung, zu einer rechtsgängigen Schraube führt; die xyz-Richtungen eines Rechtssystems können durch Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand angezeigt werden.

Fig. 6.

Die Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$ in bezug auf die Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, oder, wie man auch sagt, in bezug auf die Achsen x, y, z, seien

$$\mathfrak{a}_x, \quad \mathfrak{a}_y, \quad \mathfrak{a}_z.$$

Es sind dann die Projektionen des Vektors $\mathfrak{a}$ auf die Achsen nach Betrag, Richtung und Sinn gegeben durch

$$\mathfrak{a}_x\mathfrak{i}, \quad \mathfrak{a}_y\mathfrak{j}, \quad \mathfrak{a}_z\mathfrak{k}.$$

Die Summation dieser drei Vektoren führt, wie man aus Fig. 6 ersieht, zum Vektor $\mathfrak{a}$ selbst zurück; es ist also

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{a}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{a}_z\mathfrak{k}. \tag{8}$$

Es sei nun der Vektor $\mathfrak{a}$ nach Betrag, Richtung und Sinn gegeben; alsdann sind die Komponenten eindeutig bestimmt durch die Gleichungen

$$\mathfrak{a}_x = |\mathfrak{a}| \cos(\mathfrak{a}, x), \quad \mathfrak{a}_y = |\mathfrak{a}| \cos(\mathfrak{a}, y), \quad \mathfrak{a}_z = |\mathfrak{a}| \cos(\mathfrak{a}, z). \tag{8a}$$

Umgekehrt ist durch Angabe der drei Komponenten der Vektor $\mathfrak{a}$ eindeutig festgelegt als Diagonale des rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Kanten die Vektoren $\mathfrak{a}_x\mathfrak{i}$, $\mathfrak{a}_y\mathfrak{j}$, $\mathfrak{a}_z\mathfrak{k}$ sind; sein Betrag ist

$$|\mathfrak{a}| = \sqrt{\mathfrak{a}_x^2 + \mathfrak{a}_y^2 + \mathfrak{a}_z^2}, \tag{8b}$$

seine Richtung und seinen Sinn bestimmen die Gleichungen (8a).

Aus den drei Komponenten eines Vektors in bezug auf die Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ läßt sich seine Komponente in bezug auf einen beliebigen Einheitsvektor $\mathfrak{s}$ berechnen, wofern die Winkel bekannt sind, die dieser mit den Grundvektoren einschließt. Man hat, gemäß (8), den Vektor $\mathfrak{a}$ als Summe dreier den $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ parallеler Teilvektoren darzustellen, und die Komponenten dieser drei Teilvektoren in bezug auf $\mathfrak{s}$ algebraisch zu summieren; so erhält man

$$(9) \qquad \mathfrak{a}_s = \mathfrak{a}_x \cos(\mathfrak{s}, x) + \mathfrak{a}_y \cos(\mathfrak{s}, y) + \mathfrak{a}_z \cos(\mathfrak{s}, z).$$

Dieses Gesetz für die Berechnung der Komponente in bezug auf eine beliebige Achse ist den Vektoren eigentümlich. Wenn man, statt den Vektor selbst als geometrisches Gebilde zu betrachten, die Werte seiner Komponenten nach allen möglichen Richtungen ins Auge faßt, so tritt als kennzeichnendes Merkmal an Stelle des Parallelogrammgesetzes eine auf die Komponenten bezügliche Regel; diese wird eben durch die Formel (9) ausgedrückt, welche aus den Komponenten nach drei aufeinander senkrechten Richtungen die Komponente nach einer beliebigen Richtung berechnet.

§ 4. Das innere oder skalare Produkt.

Es sei $\mathfrak{K}$ die Kraft, die an einem materiellen Punkte angreift; bewegt sich der Punkt mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, so ist die Arbeit, welche die Kraft $\mathfrak{K}$ in der Zeiteinheit leistet, eine skalare Größe; ihr Wert wird gegeben durch das Produkt aus den Beträgen der Vektoren $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{v}$ und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels; dieses Produkt schreiben wir

$$(10) \qquad \mathfrak{K}\mathfrak{v} = |\mathfrak{K}| \cdot |\mathfrak{v}| \cdot \cos(\mathfrak{K}\mathfrak{v})$$

und nennen es skalares oder (nach Graßmann) inneres Produkt der beiden Vektoren; diese Bezeichnung übertragen wir auf beliebige andere Vektoren.

Der Kosinus des Winkels zwischen den Richtungen der beiden Vektoren wird $+1$, wenn die beiden Vektoren gleich gerichtet, -1, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind; er wird Null, wenn

sie einen rechten Winkel einschließen. Wendet man dies auf die Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ an, so erhält man

(11) $\mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{j}\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\mathfrak{i} = 0$, hingegen $\mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} = 1$.

Das skalare Produkt bleibt, nach der Definitionsgleichung (10), ungeändert, wenn man die Reihenfolge der Faktoren vertauscht. Die innere Multiplikation zweier Vektoren befolgt das kommutative Gesetz. Man kann das skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{v}$ auch auffassen als algebraisches Produkt aus dem Betrage des einen Vektors (etwa $\mathfrak{v}$), und aus der nach dessen Richtung genommenen Komponente des anderen Vektors ($\mathfrak{K}$). Aus dieser Deutung folgt sofort das distributive Gesetz der skalaren Multiplikation

$$(12) \qquad \mathfrak{v}\sum_{h=1}^{n}\mathfrak{K}_h = \sum_{h=1}^{n}\mathfrak{v}\,\mathfrak{K}_h.$$

Es ist nämlich nach einem in § 3 bewiesenen Satze die nach irgendeiner Richtung genommene Komponente der geometrischen Summe der Vektoren $\mathfrak{K}_h$ gleich der algebraischen Summe der nach dieser Richtung genommenen Komponenten der Vektoren $\mathfrak{K}_h$. Werden, wie oben, die Vektoren $\mathfrak{K}_h$ als Kräfte, $\mathfrak{v}$ als Geschwindigkeit angesehen, so besagt (12): Die Arbeit der resultierenden Kraft ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten der einzelnen Kräfte.

Aus der Gültigkeit des kommutativen und des distributiven Gesetzes ergeben sich für die innere Multiplikation die Rechnungsregeln der gewöhnlichen Algebra. So gilt z. B.:

$$(13) \qquad (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{c}+\mathfrak{d}) = \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{d}.$$

Drückt man die beiden Faktoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des skalaren Produktes durch die Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ aus, so erhält man:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{A}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{A}_z\mathfrak{k})(\mathfrak{B}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{B}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{B}_z\mathfrak{k}).$$

Wenn man die rechte Seite nach den gewöhnlichen Multiplikationsregeln ausrechnet und (11) berücksichtigt, so folgt

$$(14) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z,$$

eine Formel, die gemäß der Definition des skalaren Produktes

und der Gleichung (8a) in die bekannte Formel der analytischen Geometrie übergeht

$$\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \cos(\mathfrak{A}x)\cos(\mathfrak{B}x) + \cos(\mathfrak{A}y)\cos(\mathfrak{B}y) + \\ + \cos(\mathfrak{A}z)\cos(\mathfrak{B}z).$$

Eine andere, einfache Anwendung des skalaren Produktes mag das Parallelogramm der Fig. 2 betreffen, dessen Seiten die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, dessen Diagonalen die Vektoren $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$ darstellen. Es ist

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2 = \mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^2,$$
$$(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^2 = \mathfrak{A}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^2.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2 + (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^2 = 2\mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{B}^2. \tag{15}$$

Da das Quadrat eines Vektors gleich dem Quadrate seines Betrages ist, so haben wir den Satz bewiesen, daß die Summe der Quadrate über den Diagonalen eines Parallelogrammes gleich der Summe der Quadrate über allen vier Seiten ist. Ferner gilt

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2 - (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^2 = 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \tag{15a}$$

d. h. das skalare Produkt aus den Seiten eines Parallelogrammes ist gleich dem vierten Teile von der Differenz der Quadrate der Diagonalen.

§ 5. Das äußere Produkt oder Vektorprodukt.

Die Verrückungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bestimmen ein Parallelogramm (Fig. 7.). Mit Graßmann nennen wir dasselbe „äußeres Produkt" der beiden Verrückungen und schreiben es $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, indem wir die beiden Vektoren in eckige Klammern einschließen. Der Flächeninhalt des Parallelogrammes beträgt

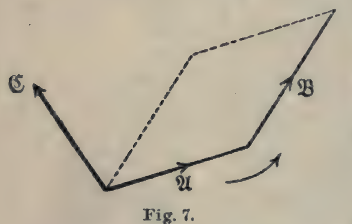


Fig. 7.

$$|\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \cdot \sin(\mathfrak{A}\mathfrak{B}),$$

seine Ebenenstellung ist durch die Richtungen, sein Umlaufssinn durch die Reihenfolge der Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ festgelegt. Da wir Verrückungen als gleichwertig betrachten, falls sie nach Betrag, Richtung und Sinn überein-

stimmen, auch dann, wenn sie von verschiedenen Anfangslagen ausgehen, so gelten zwei derartige Parallelogramme als gleichwertig, wenn sie von beliebigen Punkten des Raumes aus in zwei parallelen Ebenen konstruiert sind. Wir wollen sie sogar auch dann noch als gleichwertig betrachten, wenn ihre Seitenlängen verschieden sind und sie nur nach Flächeninhalt, Ebenenstellung und Umlaufssinn übereinstimmen. Ferner ordnen wir allen gleichwertigen Parallelogrammen eine einzige Verrückung durch folgende Festsetzung zu: der Betrag der Verrückung soll gleich dem Flächeninhalte des Parallelogramms sein, seine Richtung soll senkrecht zu der Ebene des Parallelogramms stehen und dessen Umlaufssinne so zugeordnet sein, wie sich bei einer rechtsgängigen Schraube die Fortschreitungsrichtung dem Umlaufssinne zuordnet. Es entsprechen also zwei gleichwertige Parallelogramme einer und derselben Verrückung, zwei verschiedenwertige entsprechen verschiedenen Verrückungen; umgekehrt ist durch Angabe der zugeordneten Verrückung das Parallelogramm nach Flächeninhalt, Ebenenstellung und Umlaufssinn festgelegt, und zwar ändern sich diese Bestimmungsstücke in stetiger Weise mit Betrag und Richtung der Verrückung.

Ferner soll folgende Festsetzung getroffen werden: Unter der Summe mehrerer Parallelogramme soll ein Parallelogramm verstanden werden, dem sich eine Verrückung zuordnet, welche gleich der geometrischen Summe der den einzelnen Parallelogrammen zugeordneten Verrückungen ist.

Nach der von uns zugrunde gelegten Definition des Vektors (§ 1) ist das so erklärte äußere Produkt zweier Vektoren selbst ein Vektor; es wird daher vielfach auch „vektorielles Produkt" oder „Vektorprodukt" genannt. Gerade darum haben wir die Definition des Vektors (§ 1) so allgemein gehalten, um auch solche geometrische und physikalische Größen, die nicht einen Fortschreitungssinn, sondern einen Umlaufs- oder Drehsinn besitzen, als Vektoren bezeichnen zu können.

Welche Bedeutung kommt nun den Komponenten des Vektors

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \tag{16}$$

zu? Da $\mathfrak{C}$ mit einer jeden der Achsen denselben Winkel ein-

schließt wie das dem Vektor $\mathfrak{C}$ zugeordnete Parallelogramm mit der zu der Achse senkrechten Ebene, so sind die Komponenten von $\mathfrak{C}$ nach den Koordinatenachsen (xyz) gleich den Flächeninhalten der senkrechten Projektionen des Parallelogramms auf die yz-, zx-, xy-Ebene; ihr Vorzeichen legt den Umlaufssinn dieser Projektionen fest.

Ändert man die Reihenfolge der Faktoren im Vektorprodukte, so kehrt sich nach unseren Festsetzungen der Umlaufssinn des Parallelogramms, mithin die Richtung der zugeordneten Verrückung um. Es gilt

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]. \tag{17}$$

Die äußere Multiplikation befolgt nicht das kommutative Gesetz.

Dagegen bleibt das distributive Gesetz auch für die Vektorprodukte gültig. Es ist

$$[(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{C}]. \tag{18}$$

Um diese Behauptung zu beweisen, setze man $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathfrak{D}$ und konstruiere das Parallelogramm, dessen Seiten den Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, dessen Diagonale dem Vektor $\mathfrak{D}$ entspricht. Man projiziere es auf die zu $\mathfrak{C}$ senkrechte Ebene; man erhält so wiederum ein Parallelogramm mit den Seiten $|\mathfrak{A}|\cdot\sin(\mathfrak{A}\mathfrak{C})$, $|\mathfrak{B}|\cdot\sin(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ und der Diagonale $|\mathfrak{D}|\cdot\sin(\mathfrak{D}\mathfrak{C})$. Dieses Parallelogramm vergrößere man im Verhältnis $|\mathfrak{C}|:1$ und drehe es in seiner Ebene um einen rechten Winkel. Alsdann stellen die Seiten die äußeren Produkte $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}]$, $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ dar, die Diagonale aber das äußere Produkt $[\mathfrak{D}\mathfrak{C}]$; dieses letztere ist mithin die geometrische Summe der beiden ersteren, wie behauptet wurde.

Man darf also bei der Ausrechnung der Vektorprodukte die Regeln der gewöhnlichen Algebra anwenden, mit der Einschränkung, daß bei der Vertauschung der Reihenfolge zweier Vektoren das Vorzeichen des Produktes umzukehren ist.

Die Vektorprodukte der Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ sind

$$\begin{cases} [\mathfrak{i}\mathfrak{j}] = \mathfrak{k}, & [\mathfrak{j}\mathfrak{k}] = \mathfrak{i}, \quad [\mathfrak{k}\mathfrak{i}] = \mathfrak{j}; \\ [\mathfrak{j}\mathfrak{i}] = -\mathfrak{k}, & [\mathfrak{k}\mathfrak{j}] = -\mathfrak{i}, \quad [\mathfrak{i}\mathfrak{k}] = -\mathfrak{j}; \\ [\mathfrak{i}\mathfrak{i}] = [\mathfrak{j}\mathfrak{j}] = [\mathfrak{k}\mathfrak{k}] = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Mithin gilt

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = [(\mathfrak{A}_x \mathfrak{i} + \mathfrak{A}_y \mathfrak{j} + \mathfrak{A}_z \mathfrak{k})(\mathfrak{B}_x \mathfrak{i} + \mathfrak{B}_y \mathfrak{j} + \mathfrak{B}_z \mathfrak{k})]$$
$$= \mathfrak{i}(\mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_y) + \mathfrak{j}(\mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_z) + \mathfrak{k}(\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_x).$$

In Determinantenform läßt sich diese Gleichung wie folgt schreiben

$$(20) \qquad [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{B}_z \end{vmatrix}.$$

Die Unterdeterminanten

$$\mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_y, \quad \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_z, \quad \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_x$$

sind die Komponenten des Vektorproduktes, d. h. die Projektionen des Parallelogramms $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ auf die Koordinatenebenen.

Ein Beispiel für das äußere Pro-

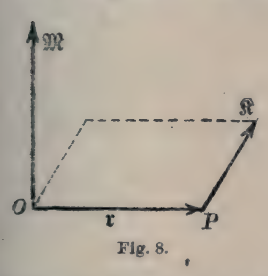


Fig. 8.

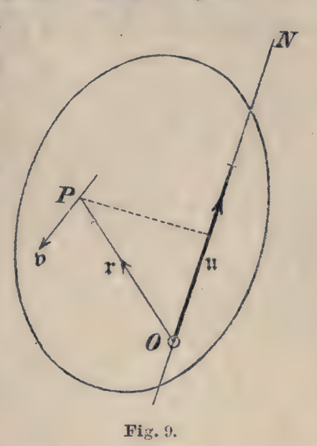


Fig. 9.

dukt zweier Vektoren ist das Moment einer Kraft $\mathfrak{K}$; es sei (Fig. 8) O der Bezugspunkt; von ihm aus sei der Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ zum Punkt P gezogen, an dem die Kraft $\mathfrak{K}$ angreift. Dann ist der Momentenvektor, d. h. das Moment der Kraft $\mathfrak{K}$ in bezug auf O.

$$(21) \qquad \mathfrak{M} = [\mathfrak{r}\mathfrak{K}].$$

Ein anderes Beispiel liefert die Kinematik des starren Körpers. Ein starrer Körper sei in einem Punkte O festgehalten, er rotiere um eine Achse ON (Fig. 9). Wir tragen von O aus auf dieser Achse eine Strecke ab, deren Länge den Betrag der Winkelgeschwindigkeit anzeigt, und zwar nach derjenigen Richtung, die der Drehbewegung sich zuordnet wie die Fortschreitungsrichtung dem Drehsinne bei einer rechtshändigen Schraubenbewegung.

Durch diese Festsetzung ist der Rotationsbewegung ein Vektor $\mathfrak{u}$ zugeordnet. Ist ferner $\mathfrak{r}$ der von O aus nach irgendeinem Punkte P des starren Körpers gezogene Fahrstrahl, so ist offenbar dessen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{u}\mathfrak{r}]. \tag{21a}$$

In der Tat, der Punkt P bewegt sich senkrecht zu der durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{u}$ gelegten Ebene; der Pfeil, der die Richtung von $\mathfrak{v}$ anzeigt, ist, wie die Figur lehrt, so gerichtet wie das Vektorprodukt. Dem Betrage nach finden wir $\mathfrak{v}$ durch Fällen eines Lotes von P auf die Drehachse und Multiplikation desselben mit der Winkelgeschwindigkeit; das gibt aber genau den Betrag

$$|\mathfrak{u}| \cdot |\mathfrak{r}| \cdot \sin(\mathfrak{u}\mathfrak{r})$$

des Vektorproduktes, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aus dem durch Gleichung (21a) ausgesprochenen Satze folgt sofort die Art der Zusammensetzung mehrerer Drehgeschwindigkeiten, deren Achsen alle durch denselben festen Punkt O gehen. Man hat, wenn $\mathfrak{u}', \mathfrak{u}''\ldots$ die Drehgeschwindigkeiten und $\mathfrak{v}', \mathfrak{v}''\ldots$ die durch sie hervorgebrachten Geschwindigkeiten des willkürlichen Punktes P des starren Körpers angeben, für die resultierende Geschwindigkeit von P den Ausdruck

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{v}'' + \cdots = [\mathfrak{u}'\mathfrak{r}] + [\mathfrak{u}''\mathfrak{r}] + \cdots = [\mathfrak{u}\mathfrak{r}],$$

wo

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}' + \mathfrak{u}'' + \cdots$$

eine Drehgeschwindigkeit darstellt, die sich aus den einzelnen Drehgeschwindigkeiten $\mathfrak{u}', \mathfrak{u}''\ldots$ nach dem Parallelogrammgesetze zusammensetzt; die Gültigkeit dieses Gesetzes gestattet es, die Drehgeschwindigkeit durch einen Vektor zu kennzeichnen.

§ 6. Produkte dreier Vektoren.

Da wir weiterhin die eckigen Klammern zur Kennzeichnung der Vektorprodukte verwenden, so werden wir runde Klammern benutzen, wenn wir zwei skalar zu multiplizierende Vektoren von den übrigen trennen wollen. Produkte dreier Vektoren kann man in drei verschiedenen Weisen ableiten.

I. Produkt aus einem Vektor und dem skalaren Produkte zweier anderer Vektoren: $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$. Da $(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ ein

Skalar ist, so ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ ein zu $\mathfrak{A}$ paralleler Vektor. Hieraus erhellt, daß z. B. $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$ ein von dem vorigen völlig verschiedener Vektor ist.

II. Skalares Produkt aus einem Vektor und dem vektoriellen Produkte zweier anderer Vektoren: $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$.

Hier gilt die wichtige Relation

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]. \tag{22}$$

Es stellt nämlich jeder dieser Ausdrücke den Rauminhalt des aus den Kanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gebildeten Parallelepipeds dar.

Um sich hiervon zu überzeugen, beachte man, daß der Betrag von $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ dem Flächeninhalt der durch die Kanten $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gebildeten Seitenfläche des Parallelepipeds gleich ist; die Richtung von $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ steht senkrecht auf diesem Parallelogramm, und zwar weist sie nach derselben Seite wie $\mathfrak{A}$, vorausgesetzt, daß die Aufeinanderfolge der Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zu einem Rechtssystem führt. In diesem Falle erhalten wir das skalare Produkt $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$, indem wir den Flächeninhalt jener Seitenfläche mit der Länge des vom Endpunkte der Kante $\mathfrak{A}$ auf sie gefällten Lotes multiplizieren. Damit ist bewiesen, daß $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ in der Tat den Inhalt des Parallelepipeds angibt, und zwar mit positivem Vorzeichen, wenn die Aufeinanderfolge $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ein Rechtssystem, mit negativem Vorzeichen, wenn sie ein Linkssystem bildet.

Es folgt gleichzeitig, daß die Beziehungen (22) erfüllt sind, indem für jedes der beiden anderen Produkte dieselben Schlüsse gelten, und weil die Folge $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gleichfalls zu Rechtssystemen führt, wenn dies für $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ zutrifft.

Der Ausdruck der drei Produkte durch die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist nach (14) und (20)

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{B}_z \\ \mathfrak{C}_x & \mathfrak{C}_y & \mathfrak{C}_z \end{vmatrix}. \tag{23}$$

III. Vektorprodukt aus einem Vektor und dem Vektorprodukte zweier anderer Vektoren: $[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{F}$.

Der Vektor $\mathfrak{F}$ liegt in der Ebene, die durch die Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bestimmt ist, und zwar senkrecht zur Projektion von $\mathfrak{A}$

auf diese Ebene. Denn der Vektor $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ steht senkrecht zu jener Ebene, und $\mathfrak{F}$ steht senkrecht auf $\mathfrak{A}$ und auf $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$.

Die x-Komponente des Vektors $\mathfrak{F}$ ist nach (20)

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{A}_y(\mathfrak{B}_x\mathfrak{C}_y - \mathfrak{B}_y\mathfrak{C}_x) - \mathfrak{A}_z(\mathfrak{B}_z\mathfrak{C}_x - \mathfrak{B}_x\mathfrak{C}_z);$$

wir ordnen folgendermaßen

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{B}_x(\mathfrak{A}_x\mathfrak{C}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{C}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{C}_z) - \mathfrak{C}_x(\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z),$$

oder nach (14) $\mathfrak{F}_x = \mathfrak{B}_x(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - \mathfrak{C}_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B});$

entsprechende Gleichungen gelten für die beiden anderen Komponenten; wir fassen sie zu der Vektorgleichung zusammen

$$[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}). \tag{24}$$

Hierdurch ist ein Produkt der dritten Art auf zwei Produkte der ersten Art zurückgeführt. Mit Hilfe dieser Beziehung findet man auch leicht

$$[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] + [\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]] + [\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]] = 0, \tag{25}$$

indem man die Glieder nach (24) entwickelt.

Endlich berechne man das skalare Produkt aus zwei Vektorprodukten $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \cdot [\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$.

Dieses ist ein Produkt der zweiten Art, in dem der erste Vektor durch das Vektorprodukt zweier anderer ersetzt ist; wir wenden die Regel (23) an und erhalten

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \cdot [\mathfrak{C}\mathfrak{D}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{D}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]].$$

Da nun nach Regel (24)

$$[\mathfrak{D}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]] = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{D})$$

zu setzen ist, so folgt

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \cdot [\mathfrak{C}\mathfrak{D}] = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - (\mathfrak{B}\mathfrak{C})(\mathfrak{A}\mathfrak{D}). \tag{26}$$

§ 7. Polare und axiale Vektoren. Skalare und Pseudoskalare.

Obwohl man dem Vektorprodukte zweier Verrückungen in umkehrbar eindeutiger Weise eine Verrückung zuordnen kann, so besteht doch zwischen dem mit Umlaufssinn begabten Parallelogramme und der ihm zugeordneten, mit einem Fortschreitungssinne versehenen Strecke (Fig. 7) ein gewisser Unterschied. Das Wesentliche dieses Unterschiedes erkennt man, wenn man

das Parallelogramm $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ an seiner eigenen Ebene spiegelt; der Umlaufssinn bleibt bei dieser Spiegelung ungeändert, die zugeordnete Verrückung hingegen kehrt ihre Richtung um. Hiermit hängt es zusammen, daß wir zur eindeutigen Bestimmung der zugeordneten Verrückung einer rechtsgängigen Schraube bedurften; bei der Spiegelung wird diese zu einer linksgängigen, in dem gespiegelten Systeme entspricht mithin die Fortschreitungsrichtung dem Umlaufssinne wie bei einer linksgängigen Schraube.

Die geradlinige Verrückung und das Vektorprodukt zweier solcher sind die Repräsentanten zweier Arten von Vektoren, die wir als *polare* und *axiale Vektoren* unterscheiden. *Den polaren Vektoren kommt eine Fortschreitungsrichtung, den axialen ein Drehsinn zu.* Ist einem mechanischen Vorgange ein Vektor zugeordnet, so kann man folgendermaßen über die Art des Vektors entscheiden: Man konstruiere die durch den Vektor bestimmte Gerade; bleibt bei Spiegelung an einer zur Geraden senkrechten Ebene der Vorgang ungeändert, so ist ihm ein axialer Vektor zuzuordnen; verläuft dagegen der gespiegelte Vorgang in entgegengesetztem Sinne, so gehört zu ihm ein polarer Vektor. In der Mechanik starrer Körper sind Translationsgeschwindigkeit und Kraft polare, Rotationsgeschwindigkeit und Drehkraft axiale Vektoren.

Solange man keine allgemeingültige mechanische Theorie der elektromagnetischen Vorgänge besitzt, ist es nicht ohne weiteres möglich, die polare oder axiale Natur der elektrischen und magnetischen Vektoren zu erkennen. Man muß hier nach anderen Merkmalen suchen; doch hat sich, wie wir später (vgl. §§ 51 und 59) sehen werden, die Vermutung Maxwells bestätigt, daß die magnetischen Vektoren axialer, die elektrischen polarer Art sind.

Rechnet man mit Komponenten, so kommt der Unterschied der beiden Arten von Vektoren nicht zur Geltung, solange man ausschließlich ein Rechtssystem zugrunde legt. Geht man aber zu einem Linkssystem über, indem man etwa die Richtungen der drei Grundvektoren umkehrt, so wechseln die Komponenten eines polaren Vektors das Vorzeichen, diejenigen eines axialen Vektors

hingegen behalten es bei, da der durch die Reihenfolge der Grundvektoren festgelegte Umlaufssinn in den Koordinatenebenen der gleiche bleibt. So kommt es, daß in Gleichungen, welche Komponenten beider Arten von Vektoren zueinander in Beziehung setzen, Vorzeichenwechsel vorzunehmen sind, sobald man ein Rechtssystem mit einem Linkssystem vertauscht. Aus dem Umstande, daß die Komponenten des äußeren Produktes zweier Vektoren sich aus algebraischen Produkten der Komponenten der beiden Vektoren zusammensetzen, folgt ohne weiteres die Regel:

Das Vektorprodukt zweier polarer und ebenso das zweier axialer Vektoren ist ein axialer, das Vektorprodukt eines polaren und eines axialen Vektors ist ein polarer Vektor.

Beispiele für diese Regeln liefern die Gleichungen (21) und (21a) des § 5. In der ersten ist der Momentenvektor als äußeres Produkt zweier polarer Vektoren, nämlich des Fahrstrahls und des Kraftvektors, dargestellt; der Momentenvektor einer Kraft ist demnach axialer Art. In der Gleichung (21a) dagegen ist die Translationsgeschwindigkeit, ein polarer Vektor, als Vektorprodukt eines axialen Vektors, der Drehgeschwindigkeit, und eines polaren, des Fahrstrahls, ausgedrückt.

Wie steht es nun mit dem skalaren Produkte eines polaren und eines axialen Vektors? Ein solches wurde im vorigen Paragraphen betrachtet und als Rauminhalt des durch drei polare Vektoren bestimmten Parallelepipeds gedeutet; es wurde bemerkt, daß das Vorzeichen des Produktes positiv oder negativ sein kann. Wir können jetzt hinzufügen, daß das Vorzeichen zu wechseln ist, wenn man von einem Rechtssysteme zu einem Linkssysteme übergeht.

Wir werden so dazu geführt, auch bei den Skalaren zwei Arten zu unterscheiden, die wir als Skalare erster und zweiter Art, oder als Skalare schlechtweg und Pseudoskalare unterscheiden. Zu der ersten Art gehören alle diejenigen Skalare, die nicht bloße Rechnungsgrößen sind, sondern die Mengen wirklicher Substanzen messen, so z. B. Masse, Energie; denn diese werden bei Veränderung des Koordinatensystemes das Vorzeichen

nicht ändern. Als Rechnungsgrößen hingegen treten, wie wir später sehen werden, auch Pseudoskalare in der mathematischen Physik auf.

Durch Multiplikation mit einem Pseudoskalar wird der polare Vektor zum axialen, der axiale zum polaren.

Offenbar dürfen nur Skalare oder Vektoren derselben Art ohne weiteres durch Addition oder Subtraktion miteinander verknüpft werden.

§ 8. Differentiation von Vektoren nach der Zeit.

Der Differentialquotient eines Vektors $\mathfrak{a}$ nach einer skalaren Veränderlichen t — etwa der Zeit — wird definiert als Grenzwert des Differentialquotienten:

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\mathfrak{a}(t + \Delta t) - \mathfrak{a}(t)}{\Delta t}. \tag{27}$$

Da die Division durch einen Skalar die vektoriellen Eigenschaften bestehen läßt, so ist der Differentialquotient eines Vektors nach einer skalaren Veränderlichen selbst ein Vektor. Ist z. B. $\mathfrak{r}$ der Fahrstrahl, gezogen von einem festen Punkte O nach einem beweglichen Punkte P, so ergibt

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \tag{28}$$

den Geschwindigkeitsvektor des Punktes P.

Da sich die Ableitung von Vektoren nach einer skalaren Veränderlichen durch einen Grenzübergang aus der Subtraktion von Vektoren, und deren Teilung durch Skalare ableitet, für welche die Regeln der gewöhnlichen Algebra gelten, so folgt, daß die Rechnungsregeln der Differentialrechnung sich ohne weiteres auf die Differentiation der Summe von Vektoren übertragen:

$$\frac{d(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{d\mathfrak{B}}{dt}, \tag{29}$$

sowie auf die des Produktes aus einem Skalar und einem Vektor:

$$\frac{d\alpha\mathfrak{a}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\mathfrak{a} + \alpha\frac{d\mathfrak{a}}{dt}, \tag{30}$$

und des inneren Produktes zweier Vektoren:

$$\frac{d(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{dt} = \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\mathfrak{B}\right) + \left(\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right). \tag{31}$$

Auch für die Differentiation des äußeren Produktes gilt die entsprechende Regel; doch ist darauf zu achten, daß die Faktoren in der richtigen Reihenfolge geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \left[\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\mathfrak{B}\right] + \left[\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right]; \tag{32}$$

denn bei Vertauschung der Faktoren ändert das Vektorprodukt sein Vorzeichen.

Es ist indessen bei der Differentiation von Vektoren nach der Zeit der folgende Umstand zu beachten, der bei der Differentiation von Skalaren nicht in Frage kommt; die Ableitung nach der Zeit ist erst dann bestimmt, wenn die Bewegung des Bezugssystems gegeben ist. Es seien zwei starre Bezugssysteme Σ und Σ' gegeben; das erste Σ werde als fest betrachtet, das zweite Σ' habe gegen Σ die Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ um den gemeinsamen Koordinatensprung. Man fasse nun einen beweglichen Punkt P ins Auge; in Σ hat er die durch (28) gegebene Geschwindigkeit. Ein Beobachter jedoch, der an der Rotation des Systemes Σ' teilnimmt, wird dem Punkte P eine andere Geschwindigkeit zuschreiben. Für ihn ruht ein Punkt, wenn er, in bezug auf Σ, die gleiche Geschwindigkeit besitzt wie der gerade mit ihm zusammenfallende Punkt P' des Systemes Σ'; die Geschwindigkeit des Punktes P', der im rotierenden starren Systeme eine feste Lage hat, wurde in Gleichung (21a) gleich dem äußeren Produkte der Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{r}$ gefunden. Die Relativgeschwindigkeit der Punkte P und P':

$$\mathfrak{v}' = \mathfrak{v} - [\mathfrak{u}\mathfrak{r}] \tag{33}$$

ist es, die der in Σ' feste Beobachter dem Punkte P zuschreibt; dieser Vektor stellt für ihn den Differentialquotienten des Fahrstrahles $\mathfrak{r}$ nach der Zeit dar:

$$\mathfrak{v}' = \frac{d'\mathfrak{r}}{dt} \tag{34}$$

schreiben wir ihn, um ihn von dem auf Σ bezogenen, zeitlichen Differentialquotienten (28) zu unterscheiden. Es ist also bei der

Ableitung des Vektors $\mathfrak{r}$ nach der Zeit darauf zu achten, auf welches Bezugssystem sie sich bezieht.

Das gleiche gilt von der Ableitung eines beliebigen Vektors $\mathfrak{A}$ nach der Zeit; der Vektor $\mathfrak{A}$ kann ja stets durch den von dem gemeinsamen Ursprung der Systeme Σ und Σ' aus gezogenen Fahrstrahl dargestellt werden.

Alsdann entsprechen der auf Σ bzw. Σ' bezogenen Geschwindigkeit des Endpunktes des Fahrstrahls, die oben mit $\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{v}'$ bezeichnet wurde, die auf Σ bzw. Σ' bezogene zeitliche Ableitung von $\mathfrak{A}$, die wir $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ bzw. $\frac{d'\mathfrak{A}}{dt}$ schreiben. Die Gleichung (33) ergibt also:

$$\frac{d'\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} - [\mathfrak{u}\mathfrak{A}] \qquad \text{oder}$$

$$\frac{d'\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + [\mathfrak{A}\mathfrak{u}]. \tag{35}$$

In diesem Zusammenhange stehen die zeitlichen Ableitungen des Vektors $\mathfrak{A}$, die auf das feste und auf das mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ rotierende Bezugssystem bezogen sind.

§ 9. Lineare Vektorfunktionen. Tensorkomponenten.

Es finden sich in der mathematischen Physik häufig die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{q}$ als lineare homogene Funktionen der Komponenten eines anderen Vektors $\mathfrak{r}$ ausgedrückt:

$$\begin{cases} \mathfrak{q}_x = q_{xx}\mathfrak{r}_x + q_{xy}\mathfrak{r}_y + q_{xz}\mathfrak{r}_z, \\ \mathfrak{q}_y = q_{yx}\mathfrak{r}_x + q_{yy}\mathfrak{r}_y + q_{yz}\mathfrak{r}_z, \\ \mathfrak{q}_z = q_{zx}\mathfrak{r}_x + q_{zy}\mathfrak{r}_y + q_{zz}\mathfrak{r}_z. \end{cases} \tag{36}$$

Diese „homogene lineare Vektorfunktion" kann stets in einen symmetrischen Teil ($\mathfrak{s}$) und einen antisymmetrischen ($\mathfrak{a}$) zerlegt werden:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{s} + \mathfrak{a}. \tag{37}$$

Dabei ist die symmetrische lineare Vektorfunktion darzustellen durch:

$$\begin{cases} \mathfrak{s}_x = s_{xx}\mathfrak{r}_x + s_{xy}\mathfrak{r}_y + s_{xz}\mathfrak{r}_z, \\ \mathfrak{s}_y = s_{yx}\mathfrak{r}_x + s_{yy}\mathfrak{r}_y + s_{yz}\mathfrak{r}_z, \\ \mathfrak{s}_z = s_{zx}\mathfrak{r}_x + s_{zy}\mathfrak{r}_y + s_{zz}\mathfrak{r}_z. \end{cases} \tag{38}$$

$$(39)\quad \begin{cases} s_{xx} = q_{xx}, \quad s_{yy} = q_{yy}, \quad s_{zz} = q_{zz}; \\ s_{xy} = s_{yx} = \dfrac{q_{xy} + q_{yx}}{2}, \quad s_{yz} = s_{zy} = \dfrac{q_{yz} + q_{zy}}{2}, \\ s_{zx} = s_{xz} = \dfrac{q_{zx} + q_{xz}}{2}. \end{cases}$$

Die antisymmetrische lineare Vektorfunktion dagegen schreibt sich:

$$(40)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_x = \frac{1}{2}(q_{xy} - q_{yx})\,\mathfrak{r}_y - \frac{1}{2}(q_{zx} - q_{xz})\,\mathfrak{r}_z, \\ \mathfrak{a}_y = \frac{1}{2}(q_{yz} - q_{zy})\,\mathfrak{r}_z - \frac{1}{2}(q_{xy} - q_{yx})\,\mathfrak{r}_x, \\ \mathfrak{a}_z = \frac{1}{2}(q_{zx} - q_{xz})\,\mathfrak{r}_x - \frac{1}{2}(q_{yz} - q_{zy})\,\mathfrak{r}_y. \end{cases}$$

Man kann sie auch folgendermaßen darstellen:

$$(41)\qquad \mathfrak{a} = [\mathfrak{c}\mathfrak{r}],$$

indem man unter $\mathfrak{c}$ einen Vektor versteht, mit den Komponenten

$$(42)\quad \mathfrak{c}_x = \frac{1}{2}(q_{zy} - q_{yz}), \quad \mathfrak{c}_y = \frac{1}{2}(q_{xz} - q_{zx}), \quad \mathfrak{c}_z = \frac{1}{2}(q_{yx} - q_{xy}).$$

Die symmetrische lineare Vektorfunktion (38) enthält, nach (39), sechs voneinander unabhängige Koeffizienten; diese sechs Größen bezeichnet man als „Tensorkomponenten". Wir wollen ein analytisches Merkmal ableiten, welches erlaubt, die Tensorkomponenten als solche zu kennzeichnen und sie insbesondere von Vektorkomponenten zu unterscheiden. Vektorkomponenten $\mathfrak{s}_x$, $\mathfrak{s}_y$, $\mathfrak{s}_z$ haben die Eigenschaft, daß sie, wenn man sie mit den entsprechenden Komponenten eines anderen Vektors $\mathfrak{r}$ multipliziert und die Produkte addiert, einen Skalar ergeben:

$$(43)\qquad S = \mathfrak{s}_x\mathfrak{r}_x + \mathfrak{s}_y\mathfrak{r}_y + \mathfrak{s}_z\mathfrak{r}_z.$$

Es lassen sich somit die Vektorkomponenten stets auffassen als Koeffizienten eines homogenen linearen Ausdrucks, welcher einen Skalar S als Funktion der Komponenten eines anderen Vektors $\mathfrak{r}$ darstellt.

Setzt man nun in (43) für $\mathfrak{s}_x$, $\mathfrak{s}_y$, $\mathfrak{s}_z$ die Werte (38) ein, so ergibt sich der Skalar S als homogene Funktion zweiten Grades der Komponenten von $\mathfrak{r}$:

$$(44)\quad S = s_{xx}\mathfrak{r}_x^2 + s_{yy}\mathfrak{r}_y^2 + s_{zz}\mathfrak{r}_z^2 + 2s_{yz}\mathfrak{r}_y\mathfrak{r}_z + 2s_{zx}\mathfrak{r}_z\mathfrak{r}_x + 2s_{xy}\mathfrak{r}_x\mathfrak{r}_y$$

Es lassen sich demnach die sechs Tensorkomponenten auffassen als die Koeffizienten eines homogenen Ausdrucks vom zweiten Grade, welcher einen Skalar S als Funktion der Komponenten eines Vektors $\mathfrak{r}$ darstellt. Man sieht also, daß die Vektoren eine Klasse gerichteter Größen erster, die Tensoren eine Klasse zweiter Ordnung bilden. Noch deutlicher wird dies aus der folgenden Darstellung.

Man trage den oben mit $\mathfrak{r}$ bezeichneten Vektor als Fahrstrahl vom Koordinatenursprung aus ab, setze also:

$$\mathfrak{r}_x = x, \quad \mathfrak{r}_y = y, \quad \mathfrak{r}_z = z.$$

Dann folgt aus (43)

$$\mathfrak{S}_x = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad \mathfrak{S}_y = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad \mathfrak{S}_z = \frac{\partial S}{\partial z}. \tag{45}$$

Es lassen sich demnach die Vektorkomponenten als erste Ableitungen eines Skalars S nach den Koordinaten auffassen.

Andererseits folgt aus (44), wenn man setzt

$$S = 2s:$$

$$\left\{\begin{aligned} s_{xx} &= \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \quad s_{yy} = \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}, \quad s_{zz} = \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}, \\ s_{yz} &= \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial z}, \quad s_{zx} = \frac{\partial^2 s}{\partial z \partial x}, \quad s_{xy} = \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y}. \end{aligned}\right. \tag{46}$$

Die sechs Tensorkomponenten lassen sich also als zweite Ableitungen eines Skalars s nach den Koordinaten auffassen. An diese Darstellung kann man die Untersuchung der Transformationseigenschaften der Tensorkomponenten bei Wechsel des Bezugssystemes anknüpfen; doch soll hierauf nicht eingegangen werden.

Lineare Vektorfunktionen treten u. a. in der Elastizitätstheorie auf. Es sei $\mathfrak{r}$ der Fahrstrahl, der von einem gegebenen Punkte O eines deformierbaren Körpers nach einem beliebigen Nachbarpunkte P gezogen ist; ferner sei $\mathfrak{q}$ die relative Verrückung, die P gegen O bei einer Formänderung des Körpers erfährt. Faßt man — was bei hinreichender Beschränkung des Bereiches erlaubt ist — die Komponenten von $\mathfrak{q}$ als lineare Funktionen der Komponenten von $\mathfrak{r}$ auf, so gelten Gleichungen von der Form (36);

schreibt man für die ursprünglichen Koordinaten von P in bezug auf O:

$$\mathfrak{r}_x = x, \quad \mathfrak{r}_y = y, \quad \mathfrak{r}_z = z,$$

so kann man die neun Koeffizienten der linearen Vektorfunktion schreiben:

$$(47) \quad \begin{cases} q_{xx} = \dfrac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x}, & q_{xy} = \dfrac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y}, & q_{xz} = \dfrac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial z}, \\ q_{yx} = \dfrac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial x}, & q_{yy} = \dfrac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial y}, & q_{yz} = \dfrac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial z}, \\ q_{zx} = \dfrac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial x}, & q_{zy} = \dfrac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial y}, & q_{zz} = \dfrac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial z}. \end{cases}$$

Nach den obigen Ergebnissen läßt sich nun die lineare Vektorfunktion, welche die relative Verrückung von P gegen O ausdrückt, in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegen. Der letztere wird durch (41) dargestellt, wobei, nach (42) und (47), zu setzen ist:

$$(48) \quad \begin{cases} \mathfrak{c}_x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial z}\right), \quad \mathfrak{c}_y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial x}\right), \\ \mathfrak{c}_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Die Verrückung $\mathfrak{a}$, die durch die antisymmetrische lineare Vektorfunktion (40) bzw. (41) dargestellt wird, läßt sich, wie in der Kinematik gezeigt wird (vgl. übrigens Gleichung (21a), die sich auf die Geschwindigkeit bezieht), als unendlich kleine Drehung des als starr gedachten Bereiches um den festen Punkt O deuten; dabei wird die Drehung nach Achsenrichtung, Drehwinkel und Drehsinn durch den Vektor $\mathfrak{c}$ bestimmt.

Für die Formänderung des Bereiches hingegen ist der symmetrische Teil der linearen Vektorfunktion maßgebend; deren sechs Koeffizienten sind, nach (39) und (47):

$$(49) \quad \begin{cases} s_{xx} = \dfrac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x}, \quad s_{yy} = \dfrac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial y}, \quad s_{zz} = \dfrac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial z}; \\ s_{xy} = s_{yx} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial x}\right), \quad s_{yz} = s_{zy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial y}\right), \\ s_{zx} = s_{xz} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Dies sind die Tensorkomponenten, welche die Formänderung des Bereiches kennzeichnen.

Wie die Formänderung, so ist auch der Spannungszustand eines elastischen Körpers durch ein System von sechs Tensorkomponenten darzustellen. Man grenze durch eine geschlossene Fläche f einen Teil des Körpers ab; $\mathfrak{n}$ sei ein Einheitsvektor, welcher, für den betreffenden Punkt der Fläche f, Richtung und Sinn der nach außen gezogenen Normalen angibt. Die Kraft, welche der außerhalb der Fläche f gelegene Teil des Körpers auf den inneren ausübt, läßt sich über die Fläche verteilen. Es sei $\mathfrak{T}df$ die auf das Stück df entfallende Kraft. Der Vektor $\mathfrak{T}$, die auf die Flächeneinheit bezogene Kraft, wollen wir kurz die „*Flächenkraft*“ nennen.

Die Flächenkraft hängt, für einen gegebenen Punkt des elastischen Körpers, selbstverständlich von der Stellung des Flächenstückes ab, auf das sie wirkt, d. h. von Richtung und Sinn des Einheitsvektors $\mathfrak{n}$. Und zwar pflegt die Elastizitätstheorie $\mathfrak{T}$ als homogene lineare, und in der Regel als symmetrische, Vektorfunktion von $\mathfrak{n}$ darzustellen:

$$\tag{50} \left\{\begin{aligned} \mathfrak{T}_x &= T_{xx}\mathfrak{n}_x + T_{xy}\mathfrak{n}_y + T_{xz}\mathfrak{n}_z, \\ \mathfrak{T}_y &= T_{yx}\mathfrak{n}_x + T_{yy}\mathfrak{n}_y + T_{yz}\mathfrak{n}_z, \\ \mathfrak{T}_z &= T_{zx}\mathfrak{n}_x + T_{zy}\mathfrak{n}_y + T_{zz}\mathfrak{n}_z, \end{aligned}\right. \qquad \text{mit}$$

$$\tag{51} T_{xy} = T_{yx}, \quad T_{yz} = T_{zy}, \quad T_{zx} = T_{xz}.$$

Die sechs Koeffizienten der symmetrischen linearen Vektorfunktion (50) sind die Tensorkomponenten, welche den *Spannungszustand* in dem betreffenden Punkte *kennzeichnen*.

Die Kraft, die, durch die Fläche f hindurch, auf deren Inneres ausgeübt wird, ist:

$$\tag{52} \mathfrak{K} = \int df\,\mathfrak{T},$$

und ihre Komponenten sind nach (50):

$$\tag{53} \left\{\begin{aligned} \mathfrak{K}_x &= \int df\,\{T_{xx}\mathfrak{n}_x + T_{xy}\mathfrak{n}_y + T_{xz}\mathfrak{n}_z\}, \\ \mathfrak{K}_y &= \int df\,\{T_{yx}\mathfrak{n}_x + T_{yy}\mathfrak{n}_y + T_{yz}\mathfrak{n}_z\}, \\ \mathfrak{K}_z &= \int df\,\{T_{zx}\mathfrak{n}_x + T_{zy}\mathfrak{n}_y + T_{zz}\mathfrak{n}_x\}. \end{aligned}\right.$$

Zweites Kapitel.

Die Vektorfelder.

§ 10. Die hydrodynamische Abbildung.

Im ersten Kapitel dieses Abschnittes haben wir den Begriff des Vektors und die Regeln der Vektoralgebra in Anlehnung an die Mechanik des materiellen Punktes entwickelt. Die Geschwindigkeit eines solchen wurde durch einen einzigen Vektor dargestellt. Die allgemeinste Bewegung des starren Körpers, der doch aus einer unendlichen Zahl materieller Punkte besteht, konnten wir durch zwei Vektoren abbilden, die von einem beliebig gewählten Bezugspunkte aus zu konstruieren waren. In diesem Kapitel nun knüpfen wir an die Aufgabe an, den Bewegungszustand einer den Raum erfüllenden Flüssigkeit zu analysieren. Hier sind die Geschwindigkeiten verschiedener Massenteilchen im allgemeinen als voneinander unabhängig anzusehen, es ist jedem Punkte sein besonderer Geschwindigkeitsvektor zuzuordnen. Die bewegte, den Raum erfüllende Flüssigkeit repräsentiert, wie man sagt, ein Vektorfeld.

Man spricht in der mathematischen Physik von dem Felde einer Zustandsgröße, wenn man den Wert der Zustandsgröße in einem räumlichen Bereiche in seiner Abhängigkeit vom Orte betrachtet, und nimmt die Werte im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme einzelner Flächen, Linien und Punkte, als stetig an. Es gibt Skalarfelder (z. B. das Temperaturfeld) und Vektorfelder (z. B. das Schwerkraftfeld).

Durch das Studium der Flüssigkeitsbewegungen ist die Theorie der Vektorfelder außerordentlich gefördert worden, insbesondere durch die grundlegenden Untersuchungen von Helmholtz über die Wirbelbewegungen. Auf ihnen fußte Maxwell, als er es unternahm, die Faradaysche Idee des Kraftfeldes mathematisch zu begründen. Maxwell waren hydrodynamische Analogien sogar mehr als rein mathematische Bilder; hydrodynamische Vorstellungen über den Feldmechanismus leiteten ihn bei der Aufstellung der Nahewirkungsgesetze des elektromagnetischen Feldes.

Wir schließen uns demnach der historischen Entwicklung an, wenn wir in diesem Kapitel die mathematische Theorie der Vektorfelder an der Hand der hydrodynamischen Abbildung entwickeln. Ähnlich wie wir oben einem beliebigen Vektor eine Verrückung zugeordnet haben, ersetzen wir den Vektor, dessen Feld wir untersuchen, durch den Geschwindigkeitsvektor einer den Raum erfüllenden Flüssigkeit. Bei dieser hydrodynamischen Abbildung müssen wir allerdings, um nicht auf besondere Felder beschränkt zu sein, der Flüssigkeit zuweilen Eigenschaften zuschreiben, die von denen der wirklichen Flüssigkeiten einigermaßen abweichen. Das wird gestattet sein, da es sich hier nur um eine mathematische Analogie handelt.

§ 11. Das wirbelfreie Feld. Das Potential und der Gradient.

Aus einem jeden Skalarfelde können wir folgendermaßen ein Vektorfeld ableiten. Wir denken uns den Skalar φ von Punkt zu Punkt stetig veränderlich. Die Zunahme, welche er beim Fortschreiten längs des Linienstückes $d\mathfrak{s}$ erfährt, dividiert durch dessen Länge ds, mag die Komponente des Vektors $\mathfrak{v}$ in Richtung des Linienstückes ergeben. Es soll also sein

$$\mathfrak{v}_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \tag{54}$$

insbesondere die Komponenten parallel den Koordinatenachsen

$$\mathfrak{v}_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{v}_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{v}_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{55}$$

Wir wollen uns davon überzeugen, daß diese Größen in der Tat dem Transformationsgesetze der Vektorkomponenten genügen. Die Richtungskosinusse des Linienstückes $d\mathfrak{s}$ sind:

$$\cos(\mathfrak{s}, x) = \frac{\partial x}{\partial s}, \quad \cos(\mathfrak{s}, y) = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \cos(\mathfrak{s}, z) = \frac{\partial z}{\partial s}. \tag{56}$$

Indem man nun φ als Funktion der Koordinaten x, y, z ansieht, erhält man

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s};$$

es folgt also aus (54), (55) und (56):

$$\mathfrak{v}_s = \mathfrak{v}_x \cos(\mathfrak{s}, x) + \mathfrak{v}_y \cos(\mathfrak{s}, y) + \mathfrak{v}_z \cos(\mathfrak{s}, z). \tag{57}$$

Die durch (54) definierte Größe $\mathfrak{v}_s$ läßt sich also wirklich als Vektorkomponente auffassen; denn die Transformationsformel (57) stimmt mit der für Vektorkomponenten kennzeichnenden Gleichung (9) des § 3 überein.

Der soeben eingeführte Vektor $\mathfrak{v}$ zeigt die Richtung des größten Anstieges des Skalars φ an, sein Betrag den auf die Längeneinheit bezogenen Betrag des größten Anstieges

$$|\mathfrak{v}| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Wir nennen ihn den „Gradienten" des Skalars φ; wir wollen uns indessen nicht des von manchen Autoren verwandten Symboles „grad" für diesen Begriff bedienen, sondern einer anderen symbolischen Schreibweise, die auf Hamilton, den Erfinder der Quaternionen, zurückgeht. Greifen wir nämlich auf die im § 3 eingeführten Grundvektoren $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ zurück, so können wir schreiben

$$\mathfrak{v} = \left(\mathfrak{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right). \tag{58}$$

Man führe nun den sogenannten Hamiltonschen Operator ∇ ein

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

und rechne mit ihm nach den Regeln, die für die Multiplikation eines Vektors mit Skalaren im vorigen Kapitel angegeben wurden, indem man die an Stelle der Vektorkomponenten tretenden Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial z}$$

wie Skalare behandelt; dann erhält man

$$\mathfrak{v} = \nabla\varphi = \left(\mathfrak{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \tag{58a}$$

als symbolischen Ausdruck des Gradientenvektors.

Man bilde das innere Produkt aus dem Vektor $\mathfrak{v}$ und dem Linienstücke $d\mathfrak{s}$:

$$\mathfrak{v}\,d\mathfrak{s} = \mathfrak{v}_s\,ds;$$

es ist gleich der Länge des Linienstückes $d\mathfrak{s}$, multipliziert mit der Komponente von $\mathfrak{v}$ in bezug auf $d\mathfrak{s}$. Nun integriere man über eine Kurve, die vom Punkte 1 zum Punkte 2 führt. Das so gebildete Linienintegral

(59)
$$\int_1^2 \mathfrak{v}\,d\mathfrak{s} = \int_1^2 \mathfrak{v}_s\,ds;$$

hat für jeden Integrationsweg in einem gegebenen Vektorfelde einen ganz bestimmten Wert.

In dem hier vorliegenden besonderen Falle, wo der Vektor $\mathfrak{v}$ der Gradient eines Skalars φ ist, wird nun das Linienintegral (59) vom Wege unabhängig, der die Punkte 1 und 2 verbindet. In der Tat

$$\mathfrak{v}_s ds = \frac{\partial \varphi}{\partial s}\,ds$$

ist der Zuwachs des Skalars φ auf dem Wegstücke ds; bei der Bildung des Linienintegrales (59) setzen sich alle diese infinitesimalen Beiträge zusammen und ergeben den gesamten Zuwachs von φ:

(59a)
$$\int_1^2 \mathfrak{v}\,d\mathfrak{s} = \varphi_2 - \varphi_1 \,.$$

Es hat also das Linienintegral des Gradienten denselben Wert für zwei Wege, die Anfangspunkt und Endpunkt gemein haben. Das Linienintegral des Gradienten verschwindet für jeden geschlossenen Weg:

(59b)
$$\oint \mathfrak{v}\,d\mathfrak{s} = \oint \frac{\partial \varphi}{\partial s}\,ds = 0\,.$$

Wir wollen die Flüssigkeitsströmung, die das Feld des Vektors $\mathfrak{v}$ abbildet, wirbelfrei nennen, wenn sein Linienintegral längs eines jeden geschlossenen Weges verschwindet, und auch das abgebildete Feld in diesem Falle als wirbelfreies bezeichnen. Dann können wir den Satz aussprechen: Das Feld des Gradienten eines Skalars φ ist stets ein wirbelfreies.

In einem Kraftfelde gibt das Linienintegral des Kraftvektors die Arbeit an. Die Bedingung, daß das Linienintegral längs einer jeden geschlossenen Kurve Null sein soll, besagt hier das Folgende: es ist nicht möglich, durch wiederholtes Herumführen eines materiellen Punktes längs eines geschlossenen Weges unbegrenzt Arbeit zu gewinnen. Wir haben gezeigt, daß diese Be-

dingung erfüllt ist, wenn der Kraftvektor der Gradient eines Skalars ist.

Umgekehrt gilt der Satz: Ein wirbelfreies Vektorfeld ist stets als Feld des Gradienten eines Skalars aufzufassen. In der Tat, es ist durch

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^P \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} \tag{60}$$

ein Skalar von der verlangten Eigenschaft eindeutig definiert: dabei bezeichnet φ_0 den Wert von φ im Anfangspunkt der Integrationskurve. Bei Verschiebung des Endpunktes P ändert sich φ um

$$d\varphi = \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = \mathfrak{v}_s\, ds\,.$$

Mithin gilt

$$\mathfrak{v}_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s}\,,$$

d. h. das wirbelfreie Vektorfeld ist wirklich als Gradientenfeld darzustellen.

Ist das Feld, um das es sich handelt, ein Kraftfeld, so nennt man $(-\varphi)$ das Potential, oder besser das skalare Potential. Die Existenz eines Potentials ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß nicht aus dem Kraftfelde auf die angegebene Weise Arbeit unbegrenzt zu gewinnen ist. Das wirbelfreie Kraftfeld der Schwerkraft war es, aus dem zuerst der Begriff des Potentiales erwuchs. Auf die Hydrodynamik hat man diesen Begriff übertragen, indem man den jeder wirbelfreien Bewegung zugeordneten Skalar $(-\varphi)$ als Geschwindigkeitspotential bezeichnete.

§ 12. Die Ergiebigkeit eines Quellenfeldes und die Divergenz

Der idealen Flüssigkeit, die unserer hydrodynamischen Abbildung zugrunde liegt, schreiben wir weiterhin die Eigenschaft der Inkompressibilität zu. Hierdurch wird eine Beschränkung der Bewegungsfreiheit der Flüssigkeit eingeführt, da in dem mit Flüssigkeit gefüllten Gebiete durch eine jede geschlossene Fläche im ganzen ebensoviel Flüssigkeit ausströmen wie einströmen muß. Mit Hilfe einer solchen Strömung könnten wir nur besondere Vektorfelder abbilden.

Um diese Beschränkung nachträglich wieder aufzuheben, lassen wir zu, daß an gewissen Stellen des Raumes Flüssigkeit fortwährend neu erzeugt, an anderen solche vernichtet wird. Stellen der ersten Art wollen wir als Quellen, Stellen der zweiten Art als Senken oder auch als negative Quellen bezeichnen; wir behalten uns indessen vor, das Wort Quelle auch in dem allgemeineren Sinne zu gebrauchen, daß es die positiven und negativen Quellen umfaßt. Durch Annahme eines geeigneten Quellensystemes sind wir nun in der Lage, ein beliebiges Vektorfeld durch eine stationäre Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit abzubilden.

Wir nehmen die Quellen als stetig über den Raum verteilt an. Es entsteht dann die Aufgabe, ein Maß für die Ergiebigkeit des Quellensystemes zu finden.

Wir denken uns zu diesem Zwecke im Innern der Flüssigkeit ein kleines rechtwinkliges Parallelepiped von den Kantenlängen a, b, c. Den Koordinatenanfang legen wir in den Mittelpunkt des Parallelepipeds, die Koordinatenachsen xyz seinen Kanten parallel. Die Flüssigkeitsbewegung soll stetig und das Parallelepiped so klein sein, daß wir auf seinen Seitenflächen den Vektor $\mathfrak{v}$ mit Hilfe der Formeln berechnen können:

$$(61) \quad \begin{cases} \mathfrak{v}_x = \mathfrak{v}_{0x} + \dfrac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} \cdot x + \dfrac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} \cdot y + \dfrac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} \cdot z, \\ \mathfrak{v}_y = \mathfrak{v}_{0y} + \dfrac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} \cdot x + \dfrac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} \cdot y + \dfrac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} \cdot z, \\ \mathfrak{v}_z = \mathfrak{v}_{0z} + \dfrac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x} \cdot x + \dfrac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} \cdot y + \dfrac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z} \cdot z. \end{cases}$$

Dabei ist $\mathfrak{v}_0$ der Geschwindigkeitsvektor im Mittelpunkte des Parallelepipeds; die Werte der Ableitungen von $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ nach den Koordinaten beziehen sich ebenfalls auf diesen Punkt. Die rechten Seiten sind als Mac Laurinsche Reihen aufzufassen, welche mit Rücksicht auf die Kleinheit des Bereiches mit den linearen Gliedern abgebrochen sind.

Wir berechnen die Flüssigkeitsmenge, die im ganzen in der Zeiteinheit aus dem Parallelepiped herausströmt. Wir betrachten

zuerst die beiden zur x-Achse senkrechten Seitenflächen, für die

$$x = \pm \frac{a}{2}$$

ist. Durch die eine auf der Seite der positiven x liegende Fläche entströmt die Menge

$$\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int\limits_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz\, \mathfrak{v}_x = \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int\limits_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \left\{ \mathfrak{v}_{0x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} \cdot \frac{a}{2} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} \cdot y + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} \cdot z \right\}.$$

Da $\qquad \mathfrak{v}_{0x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z}$

hier Konstanten sind, die sich auf den Mittelpunkt des Parallelepipeds beziehen, so fallen die mit y und z behafteten Glieder heraus, und wir erhalten

$$b \cdot c \left\{ \mathfrak{v}_{0x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} \cdot \frac{a}{2} \right\}$$

für die Strömung durch diese Fläche, und ebenso

$$-b \cdot c \left\{ \mathfrak{v}_{0x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} \cdot \frac{a}{2} \right\}$$

für die Strömung, die durch die gegenüberliegende Seite das Parallelepiped verläßt; die Summe beider Glieder ist

$$a \cdot b \cdot c \cdot \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}.$$

Fügt man zwei entsprechende Ausdrücke hinzu, welche die Strömung durch die beiden anderen, zur y- bzw. z-Achse senkrechten Seitenpaare angeben, so erhält man für die Ergiebigkeit der im Innern des Parallelepipeds liegenden Quellen

$$abc \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z} \right).$$

Dieser Ausdruck gilt mit um so größerer Annäherung, je kleiner das Parallelepiped ist, er gilt genau im Grenzfalle eines verschwindend kleinen Parallelepipeds, falls die der Gleichung (61) zugrunde liegende Voraussetzung einer stetigen Flüssigkeitsströmung erfüllt ist.

Die auf die Volumeneinheit bezogene Ergiebigkeit der

Flüssigkeitsquellen nennen wir die Divergenz des Vektors $\mathfrak{v}$ und schreiben symbolisch

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z}. \tag{62}$$

Der hydrodynamischen Bedeutung der Divergenz entsprechend ist dieselbe als skalare Größe zu betrachten. Positive Werte dieses Skalars zeigen an, daß an dem betreffenden Punkte des Feldes Quellen, negative, daß Senken vorhanden sind. Aus jedem Vektorfelde ist durch Berechnung der Divergenz ein Skalarfeld, das Quellenfeld, abzuleiten. Die Divergenz eines Vektors ist ein eigentlicher Skalar oder ein Pseudoskalar, je nachdem der betreffende Vektor ein polarer oder ein axialer ist; denn geht man durch Umkehrung der Koordinatenachsen von dem Rechtssysteme zu einem Linkssysteme über, so wechseln die Differentiationssymbole $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ wie polare Vektorkomponenten das Vorzeichen, die Divergenz eines polaren Vektors behält also beim Übergang zu einem Linkssysteme das Vorzeichen bei, die Divergenz eines axialen Vektors kehrt es um.

Es ist bemerkenswert, daß man die Divergenz erhält, wenn man den Hamiltonschen Operator

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

nach den Regeln der skalaren Multiplikation (§ 4) mit dem Vektor

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{v}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{v}_z\mathfrak{k}$$

vereinigt:

$$\nabla\mathfrak{v} = \operatorname{div} \mathfrak{v}.$$

In dieser Schrift wird das Zeichen ∇ dem Gradienten vorbehalten und die Divergenz immer durch div wiedergegeben.

Wir berechnen die gesamte Flüssigkeitsströmung durch eine geschlossene Fläche f, die einen mit Flüssigkeit erfüllten Raum v begrenzt. Infolge der Unzusammendrückbarkeit muß die Menge Flüssigkeit, welche die in einem Raume enthaltenen Quellen im ganzen in der Zeiteinheit erzeugen, durch die Oberfläche nach außen strömen. Führt man die Summation über alle die infinitesimalen Parallelepipede aus, in die man den Raum geteilt denkt,

so erhält man den Überschuß der in der Zeiteinheit ausströmenden über die einströmende Flüssigkeit. Ist n die nach außen weisende Normale der Fläche, so gibt $df \cdot \mathfrak{v}_n$ die durch df in der Zeiteinheit von innen nach außen strömende Flüssigkeit an, es ist daher

$$\int dv \operatorname{div} \mathfrak{v} = \int df \mathfrak{v}_n . \tag{63}$$

Diese Gleichung spricht den sogenannten Gaußschen Satz aus. Mit Rücksicht auf die große Bedeutung dieses Satzes für die Elektrizitätslehre geben wir einen zweiten strengeren Beweis, der von der Voraussetzung einer parallelepipedischen Einleitung des Raumes unabhängig ist.

§ 13. Die Sätze von Gauß und Green.

Wir beweisen den Gaußschen Satz für ein begrenztes räumliches Gebiet von folgenden Eigenschaften. Jede Parallele zu einer der Koordinatenachsen soll die Oberfläche f nur zweimal schneiden. Besitzt ein Gebiet nicht diese Eigenschaft, so läßt es sich doch durch geeignet gelegte Schnittflächen stets in eine endliche Zahl von Stücken zerlegen, denen die vorausgesetzte Eigenschaft zukommt. Ist der Gaußsche Satz für die einzelnen Raumstücke bewiesen, so folgt durch Summation seine Gültigkeit für das ganze Gebiet, da die auf die Schnittflächen bezüglichen Beiträge der Flächenintegrale sich aufheben.

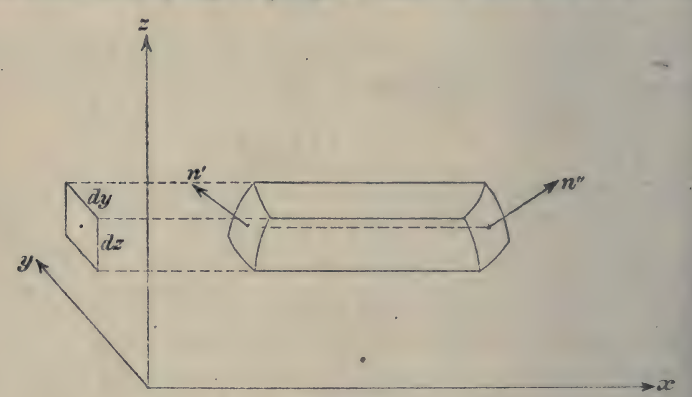


Fig. 10.

Wir legen jetzt eine Gerade parallel zur x-Achse. Es seien x', x'' die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit der Fläche f, ferner n', n'' die nach außen weisenden, in diesen Schnittpunkten auf der Fläche errichteten Normalen. Die erste Normale n' schließt einen stumpfen, die zweite n'' einen spitzen Winkel mit der x-Achse ein. Wir legen ferner einen Balken (Fig. 10) von dem unendlich kleinen rechteckigen Querschnitt $dy\,dz$ und mit jener Geraden als Achse; derselbe mag aus der Oberfläche f die Stücke df', df'' herausschneiden; dann ist

$$-df' \cos n'x = +df'' \cos n''x = dy\,dz.$$

Wir erhalten durch Integration längs des Balkens

$$dy\,dz \int\limits_{x'}^{x''} \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}\,dx = dy\,dz \{\mathfrak{v}_x\}_{x'}^{x''} = dy\,dz\,(\mathfrak{v}_x{}'' - \mathfrak{v}_x{}'),$$

wo $\mathfrak{v}_x{}'$, $\mathfrak{v}_x{}''$ sich auf die durch x', x'' bestimmten Schnittpunkte beziehen. Es wird

$$dy\,dz \int\limits_{x'}^{x''} \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}\,dx = df'\,\mathfrak{v}_x{}' \cos(n'x) + df''\,\mathfrak{v}_x{}'' \cos(n''x).$$

Indem man nun den ganzen Raum durch Ebenen parallel der (xy)- und (xz)-Ebene in derartige Balken zerlegt, teilt man gleichzeitig die Oberfläche in Stücke df, von denen jedes nur einmal vorkommt. Es ist daher

$$\int dv \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} = \int df\,\mathfrak{v}_x \cos nx.$$

Durch entsprechende Zerlegungen des Raumes in Balken, deren Längsachsen der y-Achse bzw. z-Achse parallel sind, und durch Integration der beiden anderen Glieder der Divergenz über den so zerlegten Raum erhält man entsprechende Gleichungen; die Addition der drei so gewonnenen Gleichungen ergibt den **Gauß**schen **Satz**

$$(64)\quad \int dv\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v} = \int df\{\mathfrak{v}_x \cos nx + \mathfrak{v}_y \cos ny + \mathfrak{v}_z \cos nz\} = \int df\,\mathfrak{v}_n.$$

Die soeben gegebene Ableitung zeigt, daß der Gaußsche Satz nichts anderes als eine Formel der Integralrechnung ist, deren

Gültigkeit nur die Stetigkeit des Vektors $\mathfrak{v}$ in dem betrachteten Gebiete voraussetzt. Sie führt uns zu einer allgemeineren Fassung der Definition der Divergenz: *Der Wert der Divergenz des Vektors $\mathfrak{v}$ in einem Punkte P des Feldes wird erhalten, indem man um den Punkt P herum eine kleine Fläche f legt und die nach außen tretende Strömung $\int df\,\mathfrak{v}_n$ berechnet; der Grenzwert, dem der Quotient aus dieser Strömung und Inhalt Δv des von f begrenzten Raumes zustrebt, wenn man diesen mehr und mehr verkleinert, bestimmt den Wert der Divergenz im Punkte P*

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \lim_{\Delta v = 0} \frac{\int \mathfrak{v}_n\, df}{\Delta v}.$$

Diese Definition ist insofern allgemeiner als diejenige des vorigen Paragraphen, als sie über die Form der Fläche, für welche die Strömung berechnet wird, keine einschränkende Voraussetzung macht. Der erhaltene Wert ist, wie wir erkennen, unabhängig von der Form der Fläche, insbesondere auch von dem der früheren parallelepipedischen Definition zugrunde liegenden Koordinatensystem. Damit ist erst die skalare Natur der Divergenz streng bewiesen.

Jede für die Divergenz irgendeines Vektors erhaltene Beziehung läßt sich mit Hilfe des Gaußschen Satzes sofort in eine Beziehung zwischen Raumintegralen und Flächenintegralen umsetzen. Es sei z. B. ein Vektor $\mathfrak{v}$ das Produkt aus einem Skalar ψ und einem zweiten Vektor $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{v} = \psi \cdot \mathfrak{A}$.
Dann wird die Divergenz von $\mathfrak{v}$

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \psi \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \mathfrak{A}_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \mathfrak{A}_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \mathfrak{A}_z,$$

oder, da $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}$ nach § 11 die Komponenten von $\nabla \psi$ sind,

$$\operatorname{div} \psi \mathfrak{A} = \psi \operatorname{div} \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \nabla \psi. \tag{65}$$

Die Anwendung des Gaußschen Satzes ergibt

$$\int df\, \psi \mathfrak{A}_n + \int dv \{\psi \operatorname{div} \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \nabla \psi\} \tag{66}$$

für jede geschlossene, den Raum v einschließende Fläche f.

Es sei zweitens der Vektor $\mathfrak{v}$ in dem betrachteten Bereiche wirbelfrei verteilt, also, nach § 11, als Gradient eines Skalars φ aufzufassen
$$\mathfrak{v} = \nabla \varphi .$$
Alsdann ist die Divergenz

$$\text{(67)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{v} = \operatorname{div} \nabla \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} .$$

Die Divergenz eines Vektors erhält man, wie im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, mit Hilfe des Hamiltonschen Operators, indem man diesen mit dem Vektor nach den Regeln der skalaren Multiplikation verknüpft. Man schreibt daher

$$\text{(68)} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi .$$

Den Operator $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ nennt man „Laplaceschen Operator“, mit Rücksicht darauf, daß die Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ die Laplacesche Gleichung heißt.

Die Laplacesche Gleichung sagt nichts anderes aus, als daß die wirbelfreie Strömung $\mathfrak{v} = \nabla \varphi$ gleichzeitig quellenfrei sein soll.

Den Gaußschen Satz auf dem Vektor $\nabla \varphi$ anwendend, erhält man

$$\text{(69)} \qquad \int df \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \int dv \nabla^2 \varphi .$$

Wir setzen endlich in Gleichung (66) $\mathfrak{A} = \nabla \varphi$ und erhalten

$$\text{(70)} \qquad \int df \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \int dv \{ \psi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi \nabla \psi) \} .$$

Diese Formel wird der „Greensche Satz“ genannt; sie geht, wenn $\psi = 1$ gesetzt wird, in (69) über.

Vertauscht man in Gleichung (70) die Skalaren φ, ψ, so erhält man
$$\int df \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} = \int dv \{ \varphi \nabla^2 \psi + (\nabla \varphi \nabla \psi) \} .$$
Zieht man diese Gleichung von jener ab, so fällt das innere Produkt $(\nabla \varphi \nabla \psi)$ heraus, und man erhält die wichtige Formel

$$\text{(71)} \qquad \int df \left\{ \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right\} = \int dv \{ \psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi \} .$$

Die Gültigkeit des Gaußschen Satzes hatte die Endlichkeit

und Stetigkeit des Vektors $\mathfrak{v}$, dessen Divergenz einging, zur Voraussetzung. Die letzte Formel (71), die durch Raumintegration von $\operatorname{div}\{\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi\}$ entstanden ist, setzt demgemäß die Endlichkeit und Stetigkeit der Skalaren φ, ψ und ihrer Gradienten in dem von der Fläche f begrenzten Gebiete voraus.

§ 14. Quellpunkte.

Wir haben bisher die Quellen immer als stetig verteilt, den Wert der Divergenz immer als endlich vorausgesetzt. In Wirklichkeit ist diese Annahme bei allen Vektorfeldern erfüllt. Indessen gibt es Fälle, wo die Verteilung der Quellen sich einer unstetigen nähert, indem sie nahezu auf Punkte, Linien und Flächen zusammengedrängt erscheinen. Da die unstetigen Verteilungen sich mathematisch zuweilen einfacher behandeln lassen als die stetigen, so idealisiert man wohl die Probleme, indem man mit unstetiger Verteilung rechnet. Man muß dabei allerdings, wenn man Fehlschlüsse vermeiden will, im Auge behalten, daß man Annahmen eingeführt hat, die der Wirklichkeit nicht genau entsprechen.

In diesem Paragraphen wollen wir die von Quellpunkten erzeugte wirbelfreie Strömung behandeln. Wir gehen von dem Falle eines einzelnen Quellpunktes in einer den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit aus. Nach der Symmetrie wird die dem Quellpunkte entströmende inkompressible Flüssigkeit sich nach allen Richtungen gleichmäßig ausbreiten. Sie wird radial abfließen, indem durch alle die konzentrischen, um den Quellpunkt als Mittelpunkt gelegten Kugelflächen die gleiche Strömung hindurchtritt. Dieselbe gibt die Ergiebigkeit der Quelle an, wenn wir diese, wie bisher, durch das Volumen der heraustretenden Flüssigkeit messen. Es soll aber von jetzt an die Ergiebigkeit durch die Masse der idealen Flüssigkeit bestimmt und deren Dichte, über die wir noch beliebig verfügen können, gleich $\frac{1}{4\pi}$ gesetzt werden. Das geschieht, um in den Formeln die Analogie des Strömungsfeldes und des in absoluten elektrostatischen Ein-

heiten gemessenen elektrischen Kraftfeldes deutlich hervortreten zu lassen.

Die so gemessene Ergiebigkeit e der Quelle beträgt

$$e = \frac{1}{4\pi}\int df \mathfrak{v}_n = r^2 \mathfrak{v}_r;$$

umgekehrt drückt sich die radiale Geschwindigkeit durch die Ergiebigkeit folgendermaßen aus:

$$\mathfrak{v}_r = \frac{e}{r^2}; \tag{72}$$

sie nimmt mit dem umgekehrten Quadrate der Entfernung r vom Quellpunkte ab und wird unendlich, wenn man in den Quellpunkt hineingeht.

Die wirbelfreie Natur der Strömung bringt es mit sich, daß der Vektor $\mathfrak{v}$ sich als negativer Gradient eines Potentiales darstellt

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi, \qquad \varphi = \frac{e}{r}. \tag{73}$$

Im Ausdruck des Potentiales φ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ wird, wie man sieht, der Faktor 4π durch die über die Dichte getroffene Festsetzung beseitigt; er kommt aber an einer anderen Stelle wieder herein, nämlich in die Beziehung, welche die Ergiebigkeit e mit der über eine den Quellpunkt einschließende Fläche integrierten Normalkomponente von $\mathfrak{v}$ verknüpft:

$$\int \mathfrak{v}_n df = 4\pi e. \tag{74}$$

Haben wir nun eine Reihe von h Quellpunkten von den Ergiebigkeiten $e_1 \dots e_h$, deren Felder sich überlagern, so kann man das resultierende Feld entweder durch geometrische Addition der Vektoren $\mathfrak{v}_1 \dots \mathfrak{v}_h$, oder einfacher durch algebraische Addition der skalaren Potentiale $\varphi_1 \dots \varphi_h$ bestimmen

$$\mathfrak{v} = \sum_{i=1}^{h} \mathfrak{v}_i = -\nabla\varphi, \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{h} \frac{e_i}{r_i}. \tag{75}$$

Für eine geschlossene Fläche, die eine Zahl von Quellpunkten einschließt, ist das Flüssigkeitsvolumen, welches durch die Fläche nach außen tritt, gleich 4π mal der algebraischen Summe der Ergiebigkeiten der eingeschlossenen Quellen.

Schließt die Fläche das ganze endlich ausgedehnte Quellsystem ein, so ist das Volum der herausströmenden Flüssigkeit

$$4\pi e = 4\pi \sum_{i=1}^{h} e_i . \tag{76}$$

Ist die Fläche eine Kugel, deren Mittelpunkt innerhalb des Quellsystems liegt, so nähert sich in dem Maße, wie der Radius R der Kugel wächst, die Strömung einer radialen; denn je größer der Kugelradius gegen den größten Abstand zweier Quellpunkte ist, um so geringer ist der Fehler, den man begeht, wenn man in (75)

$$\frac{r_i - R}{R}$$

gegen 1 vernachlässigt, d. h. jedes r_i durch R ersetzt, wodurch

$$\varphi = \frac{e}{R} \tag{77}$$

wird. In solchen Entfernungen wirkt das Quellsystem wie ein einzelner Quellpunkt im Mittelpunkt der Kugel, dessen Ergiebigkeit gleich der gesamten Ergiebigkeit des Quellsystems ist. Im allgemeinen verschwindet daher das Potential im Unendlichen wie die umgekehrte erste Potenz, die radiale Geschwindigkeit wie die umgekehrte zweite Potenz von R.

§ 15. Doppelquellen.

Besonderes Interesse verdienen diejenigen Quellensysteme, in denen die Summe der Ergiebigkeiten der positiven und der negativen Quellen Null ist. Hier verschwindet im Unendlichen das Potential von höherer als der ersten, die radiale Geschwindigkeit von höherer als der zweiten Ordnung; die Strömung durch eine das ganze Quellensystem einschließende Fläche ist gleich Null.

Das einfachste Feld dieser Art ist dasjenige, welches von zwei benachbarten Quellpunkten von gleicher Ergiebigkeit, aber entgegengesetztem Vorzeichen, erzeugt wird. Wir wollen dieses Quellensystem eine „Doppelquelle“ nennen. Das Potential des zugehörigen wirbelfreien Feldes wird erhalten, indem der Grenzwert berechnet wird, dem die Differenz $\frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2}$ zustrebt, wenn

Quellpunkt und Senkpunkt ganz nahe aneinander rücken. Es wird für das Verständnis dieses Grenzüberganges nützlich sein, einige Begriffe zu erläutern, die bisher nicht zur Sprache gekommen sind.

Wir haben in § 11 die Gradientenoperation ∇ kennen gelernt; dieselbe gab, auf einen Skalar angewandt, den auf die Längeneinheit berechneten Zuwachs an, den der betreffende Skalar bei einer Verschiebung nach irgendeiner Richtung erfuhr. Wir haben nun im Felde eines Quellpunktes zwei Arten von Verschiebungen zu unterscheiden, solche, bei denen der betrachtete Punkt des Feldes, den wir Aufpunkt nennen wollen, verschoben, aber der Quellpunkt festgehalten wird, und solche, bei denen der Aufpunkt festgehalten und der Quellpunkt verschoben wird. Erteilt man dem Quellpunkt und dem Aufpunkt gleiche und gleichgerichtete Verrückungen, so behält jede Größe, die nur vom Abstand r der beiden Punkte abhängt, ihren Wert bei; denn der Abstand von Quellpunkt und Aufpunkt ändert sich bei einer solchen gemeinsamen Verschiebung nicht. Mithin ist für jede nur von r abhängige Größe eine Verrückung des Quellpunktes nach irgendeiner Richtung äquivalent einer Verrückung des Aufpunktes von dem gleichen Betrage, aber nach der entgegengesetzten Richtung. Indem wir den Zuwachs bei Verschiebung des Aufpunktes und des Quellpunktes ∇_a und ∇_q schreiben und ihn „Aufpunktgradienten" bzw. „Quellpunktgradienten" nennen, können wir den Satz aussprechen: Für jede Funktion des Abstandes von Aufpunkt und Quellpunkt ist der Aufpunktgradient entgegengesetzt gleich dem Quellpunktgradienten.

Angewandt auf den umgekehrten Abstand ergibt dies:

$$\nabla_a \frac{1}{r} = -\nabla_q \frac{1}{r}. \tag{78}$$

Die gewöhnliche, an skalare Größen sich anlehnende Betrachtungsweise führt zu demselben Ergebnis, indem sie den Abstand von Quellpunkt und Aufpunkt

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

setzt, wo xyz die Koordinaten des Aufpunktes, $\xi\eta\zeta$ diejenigen des Quellpunktes sind. Es ist dann

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial r}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial \zeta}, \tag{78a}$$

woraus der obige Satz für jede ausschließlich von r abhängige Größe folgt.

Bei der Aufgabe, von der wir ausgingen, nämlich das Potential einer Doppelquelle zu berechnen, ist eine Verrückung des Quellpunktes vorzunehmen, und zwar in der Richtung vom Senkpunkte zum Quellpunkte, und um eine sehr kleine Strecke, die gleich dem Abstande l der beiden Punkte ist. Wir führen einen neuen Vektor $\mathfrak{m}$ ein, den wir „Moment der Doppelquelle" nennen; seine Richtung soll vom Senkpunkte nach dem Quellpunkte weisen, und sein Betrag soll gleich sein der Ergiebigkeit (e) des Quellpunktes, multipliziert mit dem Abstande l vom Quellpunkt und Senkpunkt: $|\mathfrak{m}| = el$. Dann erhalten wir als Potential der Doppelquelle:

$$\varphi = \left(\mathfrak{m}\nabla_q \frac{1}{r}\right) = -\left(\mathfrak{m}\nabla_a \frac{1}{r}\right), \tag{79}$$

oder in skalarer Schreibweise,

$$\varphi = \mathfrak{m}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \mathfrak{m}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \mathfrak{m}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} = -\left\{\mathfrak{m}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathfrak{m}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathfrak{m}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right\}. \tag{79a}$$

Die Formel (79) gilt als Näherungsformel für ein Quellpaar entgegengesetzten Vorzeichens und für Entfernungen des Aufpunktes, die groß sind gegen den Abstand von Quellpunkt und Senkpunkt. Sie gilt streng für beliebige Abstände des Aufpunktes von der Doppelquelle, wenn man l gleich Null macht; dabei muß, wenn $|\mathfrak{m}|$ endlich bleiben soll, die Ergiebigkeit e unendlich werden, in der Weise, daß das Produkt $e \cdot l$ bei dem Grenzübergang einem bestimmten endlichen Werte zustrebt. Der Punkt $r = 0$ ist natürlich bei der Doppelquelle ebenso wie bei der einfachen Quelle aus dem Felde auszuschließen, weil die Geschwindigkeit dort unendlich wird. Hier liegt ein Fall vor, wo die idealisierende Voraussetzung unstetiger Verteilung der Quellen, auf das Quellgebiet selbst angewandt, zum Widerspruche mit der Wirklichkeit führt.

§ 16. Berechnung des wirbelfreien Vektorfeldes aus dem Quellenfelde.

Wir kehren zur Untersuchung des wirbelfreien Vektorfeldes mit stetig über den Raum verteilten Quellen zurück. Dabei soll, ebenso wie im letzten Paragraphen, die Ergiebigkeit der Quellen nicht durch den Rauminhalt, sondern durch die Masse der erzeugten idealen Flüssigkeit von der Dichte $\frac{1}{4\pi}$ definiert sein. Man hat dann, auf die Volumeinheit berechnet, die Ergiebigkeit

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{v}, \tag{80}$$

und da in dem wirbelfreien Felde der Vektor $\mathfrak{v}$ der negativ genommene Gradient eines Potentiales ist,

$$4\pi\varrho = \operatorname{div} \mathfrak{v} = -\operatorname{div} \nabla\varphi = -\nabla^2\varphi. \tag{81}$$

Die letzte Gleichung lehrt, aus dem Vektor $\mathfrak{v}$ bzw. aus seinem Potentiale φ die Verteilung der Quellen zu berechnen. Es mag jetzt die umgekehrte Aufgabe vorgelegt sein: Aus dem gegebenen Quellenfelde soll das Vektorfeld berechnet werden, das als stetig und wirbelfrei vorausgesetzt wird; dabei wird angenommen, daß die Quellen durchweg im Endlichen liegen, daß also außerhalb eines gewissen endlichen Bereiches ϱ gleich Null ist.

Es fragt sich zunächst, ob durch diese Angaben das Feld des Vektors $\mathfrak{v}$ eindeutig bestimmt ist, oder ob es nicht zwei Vektoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ gibt, die beide den Voraussetzungen Genüge leisten, ohne daß ihre Felder durchaus übereinstimmen. Um diese Frage zu entscheiden, untersuchen wir den Vektor $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2$, den wir bei dieser Hilfsbetrachtung mit $\mathfrak{v}$ bezeichnen wollen. Sein Feld soll einerseits wirbelfrei, anderseits, weil ja $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ dieselben Quellen haben, quellenfrei sein. Aus der letzteren Eigenschaft folgt, daß das ganze Strömungsfeld sich lückenlos in Röhren teilen läßt, derart, daß durch alle Querschnitte einer bestimmten Röhre die gleiche Flüssigkeitsmenge strömt, und daß die Röhren im Endlichen weder beginnen noch endigen. Ins Unendliche aber können

die Röhren, von denen jede einen endlicheu Flüssigkeitsstrom enthält, nicht reichen; denn es verschwindet, da die gesamte Ergiebigkeit der Quellen von $\mathfrak{v}$ gleich Null ist, die Geschwindigkeit im Unendlichen von höherer als der zweiten Ordnung. Es müßten also die Stromröhren geschlossene Röhren sein. Wir berechnen nun die kinetische Energie, die in einer solchen, hinreichend klein gewählten Röhre enthalten ist, indem wir $\frac{\mathfrak{v}^2 dv}{8\pi}$ über die Stücke der Röhre integrieren. Ist s die Leitkurve der Röhre, der parallel die Strömung fließt, und q ihr Querschnitt, so ist $\mathfrak{v}^2 = \mathfrak{v}_s^2$ und $dv = q\,ds$, ferner $\mathfrak{v}_s q$ konstant längs der Röhre. Wir erhalten mithin für die kinetische Energie, die in der ganzen Röhre enthalten ist,

$$\frac{1}{8\pi}\mathfrak{v}_s q \oint \mathfrak{v}_s ds.$$

Da nun aber die Strömung als wirbelfrei vorausgesetzt war, so verschwindet das längs der geschlossenen Leitkurve erstreckte Linienintegral von $\mathfrak{v}$; mithin ist die in einer jeden Röhre enthaltene Energie, und daher auch die gesamte kinetische Energie der Flüssigkeitsströmung gleich Null.

Das ist aber unmöglich, wofern nicht im ganzen Felde $\mathfrak{v} = 0$, mithin $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2$ ist. Die Felder der beiden Vektoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, die zunächst als verschieden betrachtet wurden, sind also in Wirklichkeit die gleichen; das gestellte Problem kann nicht mehrere Lösungen besitzen.

Der soeben gegebene Eindeutigkeitsbeweis ist natürlich ganz unabhängig davon, ob unserer idealen Flüssigkeit lebendige Kraft zugeschrieben wird oder nicht, er beruht nur auf dem Verschwinden des mathematischen Ausdruckes

$$T = \int dv \frac{1}{8\pi}\mathfrak{v}^2, \tag{82}$$

der allerdings zweckmäßig als lebendige Kraft der Strömung gedeutet wird. Das tritt vielleicht klarer hervor, wenn wir den geführten Beweis in analytischem Gewande wiederholen. Wir setzen in der Greenschen Formel (70)

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi, \quad 4\pi\varrho = -\nabla^2\varphi = 0, \quad \varphi = \psi.$$

Das Oberflächenintegral verschwindet, wenn die Fläche f in das Unendliche rückt, und es folgt

$$\int dv\, \mathfrak{v}^2 = 0.$$

Da $\mathfrak{v}^2$ niemals negativ werden kann, so kann das über den ganzen Raum erstreckte Integral nur verschwinden, wenn $\mathfrak{v}$ durchweg Null ist.

Die Greenschen Sätze führen uns nun weiter zur Lösung der gestellten Aufgabe; sie gestatten es, aus dem Quellenfelde ϱ zunächst das Feld des Potentiales φ zu berechnen, als dessen negativer Gradient dann der Vektor $\mathfrak{v}$ erhalten wird. Wir legen die Formel (71) zugrunde; φ, ψ bedeuteten daselbst Skalare, die nebst ihren Gradienten im ganzen Raume endlich und stetig sind. Wir verstehen unter φ das gesuchte Potential, während wir

$$\psi = \frac{1}{r}$$

setzen, wo r die Entfernung von einem beliebig gewählten Punkte P des Feldes angibt. Der Punkt P muß dann aus dem Felde ausgeschlossen werden, etwa durch eine kleine Kugelfläche f_0, damit ψ in dem ganzen Gebiete, auf das wir die Formel (71) anwenden, endlich und stetig wird.

Die Begrenzung dieses Gebietes besteht erstens aus der kleinen, um P als Mittelpunkt gelegten Kugel f_0, zweitens aus einer das ganze Quellengebiet einschließenden Fläche f. Das über die letztere erstreckte Integral

$$\int df \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\}$$

verschwindet, wenn wir die Fläche f in das Unendliche rücken lassen; denn es wachsen zwar die Flächenelemente wie r^2, aber φ verschwindet mindestens wie r^{-1}, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ mindestens wie r^{-2}. Es ergibt daher Gleichung (71)

$$\int df_0 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\} = \int dv \left\{ \frac{1}{r} \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \frac{1}{r} \right\}.$$

In dem über die kleine Kugel f_0 zu erstreckenden Flächen-

integral bedeutet n diejenige Normale, die von dem betrachteten Gebiete nach außen weist, also nach dem Mittelpunkte der Kugel hin gerichtet ist. Es folgt

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{r^2}.$$

Läßt man nun die Kugel f_0 mehr und mehr sich auf den Punkt P zusammenziehen, so verschwindet in der Grenze das Glied

$$\int df_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

und das andere Glied wird

$$-\int \frac{df_0 \varphi}{r^2} = -4\pi\varphi,$$

wo φ jetzt den Wert des Potentiales im Punkte P bezeichnet. Da ferner in dem Raumintegrale nach Gleichung (81)

$$4\pi\varrho = \operatorname{div} \mathfrak{v} = -\nabla^2\varphi$$

einzuführen und $$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$$

zu setzen ist — es stellt $\frac{1}{r}$ das Potential eines in P befindlichen Quellpunktes von der Ergiebigkeit 1 dar, dessen Feld außerhalb f_0 quellenfrei ist —, so erhält man schließlich

$$\varphi = \int \frac{dv\varrho}{r} \tag{83}$$

als Wert des **Potentiales** in dem jetzt beliebig zu wählenden Aufpunkte P.

Vergleicht man diese Formel mit der im vorigen Paragraphen für das Potential eines Systemes von Quellpunkten abgeleiteten Formel (75), so bemerkt man, daß hier das gesamte Potential ebenso durch algebraische Summation von den einzelnen Raumteilen herrührender Beiträge entsteht, wie es dort durch Addition der Potentiale der einzelnen Quellpunkte entstand. Doch führt das jetzt für stetig verteilte Quellen erhaltene Ergebnis insofern weiter, als es auch auf das Innere des Quellengebietes anwendbar ist. Auch hier berechnet sich das Potential nach (83), der Vektor $\mathfrak{v}$ wird alsdann als negativer Gradient von φ erhalten

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi;$$

er entsteht durch geometrische Addition der von den einzelnen Bestandteilen des Quellensystemes erzeugten Geschwindigkeiten.

Bisweilen gelingt es auf Grund dieses Ergebnisses, durch bloße Symmetriebetrachtungen die von einem gegebenen Quellensystem herrührende Strömung zu finden. Es mögen etwa die Quellen gleichförmig über eine Vollkugel vom Radius a verteilt sein. Nach der Symmetrie folgt, daß die Strömung überall radial verläuft. Mithin ist das Flüssigkeitsvolumen, das durch konzentrische Kugeln vom Radius R nach außen tritt,

$$4\pi|\mathfrak{v}|R^2,$$

und der Gaußsche Satz ergibt für $R \geqq a$

$$|\mathfrak{v}| = \varrho\,\frac{V}{R^2} = \frac{e}{R^2}. \qquad \left(V = \frac{4\pi}{3}\,a^3\right)$$

Die Strömung erfolgt außerhalb der mit Quellen gleichförmig erfüllten Kugel so, als ob sich im Mittelpunkte ein Quellpunkt befände, dessen Ergiebigkeit gleich der gesamten Ergiebigkeit der Kugel ist.

Durch Kugeln hingegen, welche innerhalb des Quellengebietes liegen, tritt nur dasjenige Flüssigkeitsvolumen, welches den eingeschlossenen Quellen von der Ergiebigkeit

$$\varrho\cdot\frac{4\pi R^3}{3}$$

entspricht; die äußeren Kugelschichten, allein vorhanden, würden in dem inneren Hohlraum nach Symmetrie eine wirbelfreie Strömung nicht erzeugen können. Mithin ist für $R \leqq a$

$$|\mathfrak{v}| = \frac{4\pi}{3}\,R\cdot\varrho.$$

Das Potential φ bestimmt man nun so, daß es im Unendlichen verschwindet. Es ist für $R \geqq a$

$$\varphi = \int_R^\infty |\mathfrak{v}|\,dR = \varrho\,\frac{V}{R} = \frac{4\pi a^3}{3R}\cdot\varrho,$$

folglich für $R = a$ $\qquad \varphi = \dfrac{4\pi a^2}{3}\cdot\varrho,$

daher für $R < a$

$$\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \varrho + \int\limits_R^a |\mathfrak{v}| dR = \frac{4\pi a^2}{3} \cdot \varrho + \left\{ \frac{2\pi R^2}{3} \varrho \right\}_R^a,$$

oder schließlich

(83a) $R \geqq a$ $$\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} \varrho \cdot \frac{1}{R},$$

(83b) $R \leqq a$ $$\varphi = \left(2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3} R^2\right) \varrho.$$

Das sind die Werte des Potentiales außerhalb und innerhalb der gleichförmig mit Quellen erfüllten Vollkugel.

Es ist von Interesse, den Ausdruck (82), den wir oben als lebendige Kraft der Strömung gedeutet haben, auf eine andere Form zu bringen. Das geschieht, indem wieder in (70) $\psi = \varphi$ gesetzt und diese Gleichung auf das ganze Feld angewandt wird. Das über die unendlich entfernte Grenzfläche erstreckte Flächenintegral ist Null. Es folgt

$$T = \frac{1}{8\pi} \int dv (\nabla \varphi)^2 = -\frac{1}{8\pi} \int dv \varphi \nabla^2 \varphi,$$

daher mit Rücksicht auf (81):

(84) $$T = \frac{1}{2} \int dv \varrho \varphi.$$

Die lebendige Kraft der Strömung stellt sich hier dar als ein nur über das Quellengebiet zu erstreckendes Integral; diese Art der Darstellung erweckt den Anschein, als ob der Sitz der Energie ausschließlich das Gebiet der Quellen wäre, während doch in Wirklichkeit alle Raumteile des Strömungsfeldes Energie enthalten.

Die Berechnung der Energie des Strömungsfeldes wird oft erleichtert, wenn man die Formel (84) zugrunde legt; in dem soeben behandelten Beispiele ist die Integration nur über das Innere der Kugel zu erstrecken; da die Dichte ϱ hier konstant ist, so erhält man aus (83b)

$$T = 2\pi \varrho^2 \int\limits_0^a dR R^2 \left(2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3} R^2\right);$$

dies ergibt für die homogen mit Quellen erfüllte Vollkugel

$$T = \frac{16\pi^2\varrho^2 a^5}{3 \cdot 5} = \frac{3}{5}\frac{e^2}{a}. \tag{84a}$$

§ 17. Flächenhaft verteilte Quellen.

Die Überlegungen des vorigen Paragraphen fußten auf der Voraussetzung, daß die betrachtete wirbelfreie Strömung überall endlich und stetig verläuft, daß mithin weder das Potential, noch der Vektor $\mathfrak{v}$ selbst ihre Werte etwa beim Durchschreiten gewisser Flächen sprunghaft ändern. Wir wollen diese Voraussetzung jetzt fallen lassen, indem wir es als zulässig ansehen, daß sowohl φ wie auch die Komponenten des wirbelfreien Vektors $\mathfrak{v} = -\nabla\varphi$ an gewissen Flächen Unstetigkeiten besitzen. Es wird genügen, eine einzige Unstetigkeitsfläche (f_{12}) in Betracht zu ziehen (Fig. 11), die zwei Gebiete (1, 2) des Feldes scheidet. Da zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche $\mathfrak{v}$ der Gradient von $(-\varphi)$ sein soll, so werden die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{v}$ zu jeder Seite von f_{12} sich aus dem Anstiege des Potentiales φ beim Fortschreiten längs der Fläche berechnen, ihre Sprünge aus dem Sprunge der Potentialwerte. Es wird daher außer dem Sprunge von φ nur noch der Sprung der Normalkomponente von $\mathfrak{v}$ unabhängig vorzuschreiben sein. Wir wollen zwei diesen Sprüngen proportionale Größen ω, τ einführen, die genauer durch folgende Gleichungen bestimmt sind

Fig. 11.

$$4\pi\omega = \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_2} = -(\mathfrak{v}_{n1} + \mathfrak{v}_{n2}), \tag{85}$$

$$4\pi\tau = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{86}$$

Dabei sollen die Normalen n_1, n_2 so gerichtet sein, daß sie von dem betreffenden Gebiete (1) bzw. (2) aus, um dessen Feld es sich gerade handelt, nach der Fläche f_{12} hinweisen (Fig. 11). Diese Festsetzung stimmt überein mit der bei der Formulierung des Gaußschen Satzes getroffenen, daß nämlich die Normale einer

das Feld begrenzenden Fläche stets nach der Fläche hin gezogen werden soll.

Man überzeugt sich leicht davon, daß durch Angabe der Verteilung von ω und τ längs der Unstetigkeitsfläche, sowie der räumlichen Verteilung des Quellenfeldes ϱ, die wirbelfreie Strömung eindeutig bestimmt ist. In der Tat, betrachten wir zwei wirbelfreie Felder $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}''$, für die sowohl die räumliche Verteilung der Quellen wie auch die durch (85), (86) vorgeschriebenen Unstetigkeiten an der Fläche f_{12} die gleichen sind und die im übrigen endlich und stetig sind. Die Differenz $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}''$ wird dann ein wirbelfreies Feld darstellen, das überall quellenfrei, endlich und stetig ist; wir haben aber im vorigen Paragraphen gezeigt, daß ein solches Feld durchweg verschwindet; es ist daher $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}''$ gleich Null.

Um nun das Feld bei gegebenen Unstetigkeiten auf f_{12} wirklich zu berechnen, gehen wir wieder, wie im vorigen Paragraphen, von der Formel (71) aus; wir setzen dort

$$\psi = \frac{1}{r},$$

wo r die von irgendeinem Punkte P des Feldes aus gerechnete Entfernung ist. Wir legen diesen Punkt so, daß er nicht gerade in die Unstetigkeitsfläche fällt. Wir legen wieder eine kleine Kugel um P als Mittelpunkt, um diesen Unstetigkeitspunkt von ψ aus dem Integrationsgebiete auszuschließen. Macht man diese Kugel kleiner und kleiner, so ergibt das entsprechende Flächenintegral in (71) wiederum als Grenzwert $-4\pi\varphi$, wo φ das Potential im Punkte P ist. Jetzt muß man aber auch die Unstetigkeitsfläche f_{12} aus dem Integrationsgebiete ausschließen, weil ja Endlichkeit und Stetigkeit sowohl von φ wie von $\nabla\varphi$ in dem Gebiete notwendig zur Gültigkeit von (71) waren.

Es mag f_{12} zunächst ein ungeschlossenes Flächenstück sein. Wir denken uns eine derselben beiderseits dicht anliegende geschlossene Fläche f, welche f_{12} von dem Integrationsgebiete ausschließt, und berechnen für f das in (71) eingehende Integral

$$\int df \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\}.$$

Dasselbe setzt sich aus zwei Teilen zusammen, die von den beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche f_{12} herrühren; es wird daher

$$\int df \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\} = \int df_{12} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} \right) - \varphi_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} - \varphi_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_2} \right\}.$$

Wir wollen nun diejenige Normalenrichtung bevorzugen, welche von (2) nach (1) geht, und wollen sie durch den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ zur Darstellung bringen, den wir den einzelnen Punkten der Fläche f_{12} zuordnen (Fig. 11). Dann wird

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} = -\left(\mathfrak{n} \nabla \frac{1}{r} \right), \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_2} = +\left(\mathfrak{n} \nabla \frac{1}{r} \right).$$

Dabei bezieht sich der Zuwachs $\nabla \frac{1}{r}$ nicht auf Verrückung des Aufpunktes P, sondern auf ein Fortschreiten durch die Unstetigkeitsfläche hindurch. Da diese in einem im nächsten Paragraphen zu erläuternden Sinne als System von Doppelquellen zu betrachten ist, so schreiben wir in der Bezeichnungsweise des § 14 und mit Rücksicht auf (78)

$$-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_2} = \left(\mathfrak{n} \nabla_q \frac{1}{r} \right) = -\left(\mathfrak{n} \nabla_a \frac{1}{r} \right)$$

und erhalten durch Einführung der durch (85), (86) definierten Größen ω, τ:

$$\int df \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\} = 4\pi \int df_{12} \left\{ \frac{\omega}{r} - \left(\tau \mathfrak{n} \nabla_a \frac{1}{r} \right) \right\}.$$

Hierzu ist jetzt das Glied $-4\pi\varphi$ hinzuzufügen, welches von der um P gelegten Kugel herrührt, und die Summe ist dem über den ganzen Raum erstreckten Integral der Formel (71) gleichzusetzen, für das sich, wie im vorigen Paragraphen,

$$\int \frac{dv}{r} \nabla^2 \varphi = -4\pi \int \frac{dv \varrho}{r}$$

ergibt. Wir erhalten daher

$$\varphi = \int \frac{dv \varrho}{r} + \int df_{12} \frac{\omega}{r} - \int df_{12} \left(\tau \mathfrak{n} \nabla_a \frac{1}{r} \right) \tag{87}$$

als das Potential, dessen negativ genommener Gradient

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi$$

der gesuchte Vektor ist.

Wir deuten das Ergebnis, indem wir die drei Glieder einzeln erörtern. Das erste Glied entspricht gemäß (83) den stetig über den Raum verteilten Quellen von der Ergiebigkeit ϱ pro Volumeinheit. Zu diesem kommt nun das zweite Glied, das als Potential des Systemes über die Fläche f_{12} verbreiteter Quellen, von der Ergiebigkeit ω pro Flächeneinheit, zu deuten ist. In der Tat erkennt man diese Bedeutung der Größe ω, wenn man das Flächenstück df_{12} in einen sehr kleinen Zylinder einschließt, dessen Grundflächen df_{12} parallel und gleich sind, während seine Höhe gegen die Abmessungen der Grundflächen verschwindend klein ist. Durch die Grundflächen entströmt das Flüssigkeitsvolumen

$$-\,df_{12}(\mathfrak{v}_{n1} + \mathfrak{v}_{n2})$$

— es weisen die Normalenrichtungen n_1, n_2 der Fig. 11 nach der Fläche f_{12} hin, daher das negative Vorzeichen. Die Menge unserer idealen Flüssigkeit von der Dichte $\frac{1}{4\pi}$, die in der Zeiteinheit der Flächenstücke df_{12} entströmt, beträgt mithin

$$-\frac{1}{4\pi}df_{12}(\mathfrak{v}_{n1} + \mathfrak{v}_{n2}) = \frac{1}{4\pi}df_{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_2}\right) = \omega\, df_{12}\,,$$

es ist also wirklich ω die auf die Flächeneinheit berechnete Ergiebigkeit.

Neben der Ergiebigkeit der räumlich verteilten Quellen

$$\varrho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{v}$$

lernen wir jetzt die Ergiebigkeit der flächenhaft verteilten Quellen

$$\omega = -\frac{1}{4\pi}(\mathfrak{v}_{n1} + \mathfrak{v}_{n2})$$

kennen, als einen dem Sprunge der normalen Geschwindigkeitskomponente proportionalen Skalar. Der „Divergenz" bei stetigen Feldern tritt bei Unstetigkeitsflächen die „Flächendivergenz"

$$-\,(\mathfrak{v}_{n1} + \mathfrak{v}_{n2})$$

an die Seite.

Der Formel (83) entspricht, beim Auftreten von flächenhaften Quellenverteilungen, die folgende

$$(87a) \qquad \varphi = \int \frac{df_{12}\,\omega}{r}.$$

Es ist übrigens nicht notwendig, daß f_{12} eine ungeschlossene Fläche ist; auch für geschlossene Flächen gelten die gleichen Beziehungen. Man beweist das, indem man die Formel (71) auf die beiden Gebiete, in die der Raum durch die Unstetigkeitsfläche zerlegt wird, einzeln anwendet und die erhaltenen Gleichungen addiert. Ebenso ist das Ergebnis auf den Fall zu übertragen, daß nicht eine einzige, sondern mehrere Unstetigkeitsflächen das Feld durchschneiden. Auch hier läßt sich der Einfluß der Unstetigkeitsflächen stets durch Annahme flächenhaft verteilter Quellen darstellen, solange $\tau = 0$ ist, d. h. solange als das Potential φ bei Durchquerung jener Flächen sich stetig verhält.

§ 18. Doppelschichten.

Besitzt hingegen das Potential φ selbst Unstetigkeiten, so kommt das dritte Glied in (87) für die Berechnung des Feldes in Betracht, wobei τ durch (86) gegeben wird. Die Vergleichung dieses dritten Gliedes mit dem Ausdrucke (79), der in § 15 für das Potential einer Doppelquelle erhalten war, zeigt, welche Quellenverteilung hier anzunehmen ist.

Es sind Doppelquellen von dem Momente $\tau\mathfrak{n}$ pro Flächeneinheit, die über die Unstetigkeitsfläche hin verteilt sind. Man bezeichnet ein solches Quellensystem kurz als „Doppelschicht", den Vektor $\tau\mathfrak{n}$ als „Moment der Doppelschicht". Da $\mathfrak{n}$ einen Einheitsvektor vorstellt, so ist nach (86) der Betrag des Momentes, multipliziert mit 4π, gleich dem Sprunge, den das Potential φ beim Durchschreiten der Unstetigkeitsfläche erfährt. Da ferner $\mathfrak{n}$ die Richtung von (2) nach (1) anzeigt und τ positiv ist, wenn beim Durchschreiten in dieser Richtung φ sprungweise wächst, negativ, wenn φ sprungweise abnimmt, so ist die Richtung des Vektors $\tau\mathfrak{n}$ stets diejenige Normalenrichtung, die von niederen zu höheren Potentialwerten führt.

Entsprechend der Bedeutung des Gradienten als Zuwachs einer skalaren Größe, kann man, wenn ein Skalar sich an einer Fläche sprungweise ändert, nach einem Vorschlage von F. Emde die Fläche als Sitz eines „Flächengradienten" ansehen; dieser Vektor wird dem Betrage nach durch den Sprung des Skalars, der Richtung nach durch diejenige Normale der Unstetigkeitsfläche gegeben, die im Sinne des Sprunges vom niederen zum höheren Werte gezogen ist. Man kann also das obige Ergebnis so aussprechen: Das Moment der Doppelschicht ist gleich dem durch 4π geteilten Flächengradienten des Potentiales.

Denkt man sich zwei Parallelflächen zur Unstetigkeitsfläche f_{12} gelegt, die eine auf der Seite der größeren, die andere auf der Seite der kleineren Potentialwerte, und die erste mit einer einfachen Schicht von Quellen, die zweite mit einer einfachen Schicht von Senken belegt, derart, daß zwei einander gegenüberliegende Stücke der beiden Flächen im ganzen die Ergiebigkeit Null besitzen, und läßt man die beiden Flächen näher und näher aneinanderrücken, so besitzt im Grenzfalle die erzeugte wirbelfreie Strömung das Potential

$$(87\text{b})\quad \varphi = +\int df_{12}\left(\tau\mathfrak{n},\, \nabla_q \frac{1}{r}\right) = -\int df_{12}\left(\tau\mathfrak{n},\, \nabla_a \frac{1}{r}\right).$$

Das erkennt man sofort durch Betrachtungen, die durchaus denen entsprechen, die im § 15 zum Ausdrucke (79) für das Potential einer Doppelquelle führten. Der absolute Betrag von τ ist dem Produkte aus Abstand der beiden Schichten und Flächendichte der Quellenschicht gleichzusetzen. Wenn man nicht zur Grenze eines verschwindenden Abstandes übergeht, sondern zwei derartige Schichten in einem kleinen, jedoch endlichen Abstande annimmt, so gilt der obige Ausdruck für das Potential angenähert in solchen Aufpunkten, deren Abstand von den Punkten der beiden Schichten groß ist gegen den Abstand der beiden Schichten; er gilt in diesem Falle auch dann noch, wenn die Verteilung auf jeder der Schichten eine nicht streng, sondern nur angenähert flächenhafte ist. Solche Verteilungen der Quellen kommen in

Wirklichkeit vor. Man idealisiert sie, indem man die positiven und negativen Quellen auf zwei Flächen zusammengedrängt denkt, die dann ihrerseits wieder ganz dicht aneinanderrücken. Der Potentialausdruck, der diesem idealisierten Quellensysteme zukommt, gilt für beliebige Entfernungen des Aufpunktes von der Doppelschicht. Man muß aber im Auge behalten, daß in unmittelbarer Nähe des Quellengebietes und innerhalb desselben die vorgenommene Idealisierung nicht der Wirklichkeit entspricht, und muß sich davor hüten, hier die erhaltene Formel anzuwenden.

Man betrachte ein Flächenstück df_{12} der Doppelschicht und ziehe von seinem Mittelpunkte aus Fahrstrahlen $\mathfrak{r}$ nach den Aufpunkten. Wir wollen sagen, ein Aufpunkt liege auf der positiven oder negativen Seite von df_{12}, je nachdem der Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ mit der Richtung des Momentes $\tau \mathfrak{n} df_{12}$ des betreffenden Flächenstückes einen spitzen oder einen stumpfen Winkel einschließt. Nun besitzt

$$-\left(\tau \mathfrak{n}, \nabla_a \frac{1}{r}\right) = -\frac{\tau \cos(\mathfrak{r}\,\mathfrak{n})}{r^2}$$

im ersten Falle einen positiven, im zweiten einen negativen Wert, mithin ist

$$\frac{df_{12}\,\tau \cos(\mathfrak{r}\,\mathfrak{n})}{r^2} = \pm\, d\Omega\,|\tau|,$$

wo $d\Omega$ den körperlichen Winkel angibt, unter dem das Flächenstück df_{12} von dem betreffenden Aufpunkte aus erscheint und wo das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem der Aufpunkt auf der positiven oder auf der negativen Seite der Doppelschicht liegt; daher wird das aus den Beiträgen der Stücke der Doppelschicht sich zusammensetzende Potential

$$\varphi = \int \pm\, |\tau|\, d\Omega. \tag{88}$$

Man hat demnach den Betrag des Momentes $|\tau|$ mit dem körperlichen Winkel $d\Omega$ zu multiplizieren, unter dem das Flächenstück von dem betreffenden Aufpunkte aus gesehen wird, und über die ganze Doppelschicht zu integrieren, wobei die Beiträge derjenigen Flächenstücke positiv in Rechnung zu setzen sind, auf deren positiver Seite der Aufpunkt liegt, diejenigen negativ, auf deren negativer Seite der Aufpunkt liegt.

Im allgemeinen wird $|\tau|$ längs der Fläche veränderlich sein; ist es konstant, so nennt man die Doppelschicht gleichförmig; hier wird

$$\varphi = |\tau| \int \pm \, d\Omega = \pm |\tau| \Omega. \tag{88a}$$

Dabei gibt Ω den körperlichen Winkel an, unter dem die Fläche von einem im Aufpunkte befindlichen Beobachter gesehen wird. Das folgt ohne weiteres, wenn der Aufpunkt für alle Teile der Schicht auf der positiven, oder für alle auf der negativen Seite liegt, und hiernach ist das Vorzeichen zu bestimmen. Ist aber die gleichförmige Doppelschicht so beschaffen, daß der Aufpunkt für einzelne Teile der Schicht auf der positiven, für andere auf der negativen Seite sich befindet, so hat man die Potentiale dieser Flächenstücke einzeln aus ihren körperlichen Winkeln zu berechnen und die Winkel, mit dem richtigen Vorzeichen versehen, zu addieren.

Auch für eine geschlossene Doppelschicht gelten die erhaltenen Ergebnisse. Ist die Doppelschicht gleichförmig und weist das Moment in Richtung der äußeren Normalen, so ist außen

$$\varphi = 0;$$

denn jeder von einem äußeren Punkte aus gelegte Elementarkegel schneidet aus der Doppelschicht eine gerade Anzahl von Flächenstücken heraus, deren Potentiale dem Betrage nach gleich sind und abwechselnd mit positivem und negativem Vorzeichen zu nehmen sind. Innen aber ist

$$\varphi = -4\pi\tau.$$

Denn die von inneren Punkten ausgehenden Elementarkegel schneiden aus der Doppelschicht eine ungerade Anzahl von Flächenstücken heraus, von denen das erste mit negativem Vorzeichen zu nehmen ist, während die folgenden sich aufheben. Das einer solchen geschlossenen gleichförmigen Doppelschicht entsprechende Feld ist außen und innen Null, dabei springt aber das Potential beim Durchschreiten der Doppelschicht um $4\pi\tau$, entsprechend der Voraussetzung, von der wir ausgingen.

Daß auch für ungeschlossene gleichförmige Doppelschichten der Sprung des Potentiales $4\pi\tau$ ist, erkennt man, indem man sie

zu einer geschlossenen ergänzt denkt; das Potential der zu diesem Zwecke hinzuzufügenden Doppelschicht ist dasselbe für zwei Punkte, die auf den beiden Seiten der ursprünglichen Doppelschicht einander gegenüberliegen, abgesehen von den dem Rande benachbarten Punkten. Der Sprung $4\pi\tau$ der geschlossenen Doppelschicht ist also gleichzeitig der Sprung der ursprünglich gegebenen ungeschlossenen, ausgenommen in unmittelbarer Nähe der Randkurve.

Auf das Potential und das Feld ungeschlossener Doppelschichten kommen wir weiter unten zurück.

§ 19. Der Wirbel oder Curl eines Vektors.

Wir haben im § 11 ein Vektorfeld wirbelfrei genannt, wenn für einen jeden im Feld verlaufenen geschlossenen Weg das Linienintegral

$$\oint \mathfrak{v}\,d\mathfrak{s} = \oint \mathfrak{v}_s\,ds \tag{89}$$

verschwindet. Als hinreichende und notwendige Bedingung hierfür ergab sich, daß der Vektor $\mathfrak{v}$ als negativer Gradient aus dem Felde eines Skalars φ abzuleiten sein mußte, d. h. daß die Komponenten sich in der Form darstellen ließen

$$\mathfrak{v}_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{v}_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{v}_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Diese Darstellung der Vektorkomponenten als Ableitungen eines Skalars nach den Koordinaten ist dann und nur dann möglich, wenn die drei Ausdrücke

$$\frac{\partial\mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{v}_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{v}_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial\mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial y}$$

in allen Punkten des betreffenden Gebietes verschwinden. Das Verschwinden jener drei Größen kennzeichnet mithin das wirbelfreie Feld.

Wir werden anderseits ein Feld als Wirbelfeld bezeichnen, wenn bei der abbildenden Flüssigkeitsströmung in sich zurückkehrende Bewegungen vorkommen, derart, daß das Linienintegral (89) nicht für alle im Felde zu ziehenden geschlossenen Linien verschwindet. Es liegt nahe, dieses Linienintegral als Maß

der Wirbelstärke zugrunde zu legen; das soll in der Tat geschehen. Um aber für die Wirbelstärke an einem bestimmten Punkte des Feldes ein Maß zu erhalten, welches der Divergenz des Quellenfeldes entspricht, wollen wir das Linienintegral für eine sehr kleine, den betreffenden Punkt des Feldes umschlingende Kurve auswerten.

Wir wählen den betreffenden Punkt des als stetig vorausgesetzten Feldes zum Anfangspunkte O des Koordinatensystemes und denken uns in der (yz)-Ebene ein Rechteck von den Seitenlängen $b, c,$ in dessen Mittelpunkt der Punkt O liegt. Wir wählen es so klein, daß wir auf seinem Umfange mit den Gleichungen (61) rechnen dürfen.

Wir durchlaufen das Rechteck in demjenigen Sinne, der sich der x-Achse unseres Rechtssystemes zuordnet, wie der Umlaufssinn der Fortschreitungsrichtung bei einer rechtsgängigen Schraube zuzuordnen ist, und berechnen das Linienintegral (89) für diesen geschlossenen Weg. Die beiden zur y-Achse parallelen Seiten liefern die Beiträge

$$\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \left\{\mathfrak{v}_{0y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y}\cdot y - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}\cdot\frac{c}{2}\right\} \text{ bzw. } \int\limits_{+\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}} dy \left\{\mathfrak{v}_{0y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y}\cdot y + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}\cdot\frac{c}{2}\right\}.$$

Ihre Summe ist $\qquad -b\cdot c\cdot\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}.$

Die beiden anderen zur z-Achse parallelen Seiten ergeben

$$\int\limits_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \left\{\mathfrak{v}_{0z} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y}\cdot\frac{b}{2} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z}\cdot z\right\} \text{ bzw. } \int\limits_{+\frac{c}{2}}^{-\frac{c}{2}} dz \left\{\mathfrak{v}_{0z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y}\cdot\frac{b}{2} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z}\cdot z\right\},$$

zusammen also $\qquad b\cdot c\cdot\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y}.$

Der Wert des Linienintegrales wird mithin durch

$$b\cdot c\cdot\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}\right)$$

mit um so größerer Annäherung gegeben, je kleiner das be-

treffende Rechteck ist. Teilen wir jetzt durch den Flächeninhalt $b \cdot c$ und lassen denselben kleiner und kleiner werden, so bestimmt der Grenzwert

$$\mathfrak{w}_x = \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} \tag{90}$$

die im Punkte O herrschende „Wirbelstärke um die x-Achse"; entsprechende, durch zyklische Vertauschung der xyz abzuleitende Größen

$$\mathfrak{w}_y = \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}, \quad \mathfrak{w}_z = \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} \tag{90a}$$

geben die im Punkte O bestehenden Wirbelstärken um die y-Achse bzw. z-Achse an.

Diese drei Wirbelstärken sind die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{w}$, den wir den „Wirbel" des Strömungsfeldes nennen. Wir schreiben mit Maxwell und Heaviside

$$\mathfrak{w} = \operatorname{curl} \mathfrak{v} = \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}\right) \mathfrak{i} + \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}\right) \mathfrak{j} + \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\right) \mathfrak{k}. \tag{91}$$

In der mathematischen Enzyklopädie wird statt des Zeichens „curl" das Symbol verwandt

$$\mathfrak{w} = \operatorname{rot} \mathfrak{v} \quad \text{(lies Rotation von } \mathfrak{v}\text{)}.$$

Es ist bemerkenswert, daß auch der Curl eines Vektors mit Hilfe des Hamiltonschen Operators

$$\nabla = \mathfrak{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

abzuleiten ist. Mit einem Vektor nach den Regeln der skalaren Multiplikation verbunden, ergab dieser Operator die Divergenz (§ 12). Vereinigen wir ihn aber mit $\mathfrak{v}$ nach den Gesetzen des Vektorproduktes, so erhalten wir den Curl

$$\nabla \mathfrak{A} = \operatorname{div} \mathfrak{A}$$

$$[\nabla \mathfrak{A}] = \operatorname{curl} \mathfrak{A}.$$

Wir merken ferner die Identität an

$$\operatorname{curl} \nabla \varphi = 0, \tag{91a}$$

welche besagt, daß in einem Gradientenfelde der Wirbel stets Null ist.

Der Wirbel des polaren Strömungsvektors $\mathfrak{v}$ ist ein axialer Vektor; das ist schon daran zu erkennen, daß wir zur Festlegung

seiner Komponenten einen Umlaufssinn mit Hilfe eines Rechtssystemes festlegen mußten. Das analytische Merkmal des axialen Vektors, daß nämlich seine Komponenten bei Umkehrung der drei Achsenrichtungen die Vorzeichen behalten, ist in der Tat erfüllt; denn der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ ist polar; seine Komponenten, und ebenso die Operationen

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

wechseln bei Umkehrung der drei Achsenrichtungen das Vorzeichen. Allgemein gilt die Regel: Der Curl eines polaren Vektors ist ein axialer, der Curl eines axialen ein polarer Vektor.

§ 20. Der Satz von Stokes.

Dem Gaußschen Satze (§ 13), der zu der Divergenz in enger Beziehung steht, tritt jetzt ein Satz an die Seite, der dem Curl eines Vektors in ähnlicher Weise zugeordnet ist, und der von Stokes zuerst allgemein formuliert worden ist. Dieser Satz verknüpft das Linienintegral eines Vektors $\mathfrak{v}$, längs einer geschlossenen Kurve genommen, mit dem Flächenintegrale des Wirbels $\mathfrak{w}$, das über eine von der Kurve umrandete Fläche zu erstrecken ist.

Bei der Auswertung des Linienintegrals von $\mathfrak{v}$ muß die Kurve s in einem bestimmten Sinne durchlaufen werden. Wir betrachten eine beliebige, von der Kurve umrandete Fläche $\mathfrak{f}$, die in ihrer ganzen Ausdehnung innerhalb des stetigen Strömungsfeldes liegt. Der Umlaufssinn der Randkurve legt auch den Umlaufssinn fest, den wir den einzelnen Stücken $d\mathfrak{f}$ zuordnen können (Fig. 12); diese Flächenstücke sind also Parallelogramme von der im § 5 betrachteten Art; ihre Projektionen auf die Koordinatenebenen $d\mathfrak{f}_x$, $d\mathfrak{f}_y$, $d\mathfrak{f}_z$ besitzen einen bestimmten Umlaufssinn, der durch ihr Vorzeichen bestimmt ist. Das Vorzeichen ist positiv, wenn der Umlaufssinn sich der x-Achse bzw. der y- oder z-Achse zuordnet, wie der Umlaufssinn der Fortschreitungsrichtung bei einer rechtsgängigen Schraube; der entgegengesetzte Umlaufssinn hingegen findet statt, wenn das Vorzeichen negativ ist.

Wir nehmen nun an, daß die betrachtete Fläche von der Beschaffenheit ist, daß eine jede Parallelebene zu einer der drei Koordinatenebenen ihren Rand nur in zwei Punkten schneidet. Sollte das nicht der Fall sein, so läßt sich doch die Fläche durch geeignete Schnittkurven stets in eine endliche Zahl von Flächen zerlegen, von denen jede einzelne die genannte Eigenschaft hat. Die über die Randkurven der einzelnen Teilflächen erstreckten Linienintegrale setzen sich dann zu dem über die Randkurve der ganzen Fläche erstreckten zusammen, da die Beiträge der zweimal in entgegengesetztem Sinne zu durchlaufenden Randkurven der einzelnen Teilflächen sich herausheben.

Wir legen jetzt zwei benachbarte Parallelebenen zur (xy)-Ebene im Abstande dx; dieselben schneiden (vgl. Fig. 12) aus der Fläche f einen Streifen heraus, aus der Randkurve zwei Stücke $d\mathfrak{s}'$, $d\mathfrak{s}''$. Dem Streifen ist ein bestimmter Umlaufssinn zuzuordnen, entsprechend dem Sinne, in dem die Linienstücke $d\mathfrak{s}'$, $d\mathfrak{s}''$ zu durchlaufen sind; die Begrenzungslinie des Streifens besteht aus jenen beiden Stücken und aus den Schnittkurven jener beiden Parallelebenen zur (yz)-Ebene. Von diesen beiden Schnittkurven wollen wir diejenige, welche beim Umlauf um den Streifen auf $d\mathfrak{s}'$ folgt, und auf welche sodann $d\mathfrak{s}''$ folgt, mit λ und Anfangs- bzw. Endpunkt von λ mit P', P'' bezeichnen. Wir teilen weiter den Streifen durch Ebenen senkrecht zur z-Achse in Flächenstücke $d\mathfrak{f}$. Ihre Projektionen auf die (zx)-Ebene sind Rechtecke, von dem durch

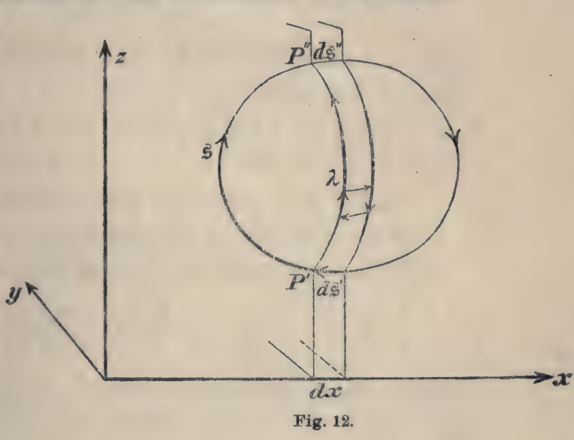


Fig. 12.

$$d\mathfrak{f}_y = \frac{\partial z}{\partial \lambda}\, d\lambda\, dx$$

angegebenen Flächeninhalte. Auch der Umlaufssinn dieser Recht-

ecke wird durch das Vorzeichen von $d\mathfrak{f}_y$ richtig angegeben, wenn das Vorzeichen von dx so gewählt wird, daß

$$dx = dx'' = - dx'$$

ist, wo dx' und dx'' die Projektionen der Linienstücke $d\mathfrak{s}'$ und $d\mathfrak{s}''$ auf die x-Achse sind; denn in diesem Falle folgt z. B., wenn $\frac{\partial z}{\partial \lambda} > 0$ ist, auf ein Fortschreiten in Richtung der positiven z-Achse ein Fortschreiten in Richtung der positiven oder negativen x-Achse (längs der Projektion von $d\mathfrak{s}''$), je nachdem $d\mathfrak{s}''$ einen spitzen oder stumpfen Winkel mit der x-Achse einschließt; im ersteren Falle wird daher der Umlaufssinn von $d\mathfrak{f}_y$ positiver, im letzteren negativer Drehung um die y-Achse entsprechen. Mit dem Vorzeichen von $\frac{\partial z}{\partial \lambda}$ kehrt sich auch der Umlaufssinn von $d\mathfrak{f}_y$ um. Da nun $$d\mathfrak{f}_y = \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda dx'',$$
so wird das über den Streifen erstreckte Integral

$$\int d\mathfrak{f}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} = dx'' \int_{P'}^{P''} d\lambda \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \lambda}.$$

Teilen wir anderseits unseren Streifen durch Ebenen senkrecht zur y-Achse in Flächenstücke, deren Projektionen auf die (xy)-Ebene $d\mathfrak{f}_z$ sind, so erkennt man, daß

$$d\mathfrak{f}_z = - \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda dx''$$

nicht nur den Inhalt, sondern auch den Umlaufssinn dieser Flächenstücke richtig wiedergibt; ist z. B.

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} > 0, \quad dx'' > 0,$$

so folgt auf wachsendes y längs λ wachsendes x längs $d\mathfrak{s}''$, was negativer Drehung um die z-Achse entspricht. Wir erhalten daher durch Integration über den Streifen

$$\int d\mathfrak{f}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} = - dx'' \int_{P'}^{P''} d\lambda \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda}.$$

Subtrahiert man die beiden Integrale und berücksichtigt, daß x längs der Kurve λ konstant ist — dieselbe war ja durch eine zur x-Achse senkrechte Ebene aus der Fläche herausgeschnitten worden —, so folgt

$$\int d\mathfrak{f}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \int d\mathfrak{f}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} = dx'' \int_{P'}^{P''} d\lambda \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial \lambda},$$

und da ferner $dx'' = -dx'$, so ist

$$\int d\mathfrak{f}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \int d\mathfrak{f}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} = dx'' \mathfrak{v}_x'' + dx' \mathfrak{v}_x'.$$

Setzt man nun alle die Streifen, in welche die Fläche f durch Ebenen senkrecht zur x-Achse geteilt wird, zusammen, so kommt jedes Stück $d\mathfrak{s}$ der Randkurve nur einmal vor. Man erhält

$$\int d\mathfrak{f}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \int d\mathfrak{f}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} = \int dx \mathfrak{v}_x.$$

In entsprechender Weise kann man die Fläche durch Ebenen senkrecht zur y-Achse oder zur z-Achse in Streifen teilen und gelangt dann durch entsprechende Überlegungen zu folgenden, durch zyklische Vertauschung der xyz aus der soeben bewiesenen Formel abzuleitenden Formeln

$$\int d\mathfrak{f}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \int d\mathfrak{f}_x \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} = \int dy \mathfrak{v}_y,$$

$$\int d\mathfrak{f}_x \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \int d\mathfrak{f}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x} = \int dz \mathfrak{v}_z.$$

Die drei Gleichungen addierend und die Größen $\mathfrak{w}_x$, $\mathfrak{w}_y$, $\mathfrak{w}_z$ des vorigen Paragraphen einführend, erhält man

$$\int d\mathfrak{f}_x \mathfrak{w}_x + d\mathfrak{f}_y \mathfrak{w}_y + d\mathfrak{f}_z \mathfrak{w}_z = \int dx \mathfrak{v}_x + dy \mathfrak{v}_y + dz \mathfrak{v}_z,$$

oder, in vektorieller Fassung, nach Vertauschung der beiden Seiten der Gleichung,

$$\oint \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = \int d\mathfrak{f} \operatorname{curl} \mathfrak{v}. \tag{92}$$

Das ist die als Stokesscher Satz bezeichnete Integraltransfor-

mation, die für jedes stetige Vektorfeld gültig ist. In dem Linienintegrale steht das skalare Produkt aus $\mathfrak{v}$ und $d\mathfrak{s}$, in dem Flächenintegrale steht das skalare Produkt aus dem Flächenstücke $d\mathfrak{f}$, das mit einem Umlaufssinn versehen ist, und dem Wirbel $\mathfrak{w}$, der gleichfalls einen Umlaufssinn besitzt. Ist der Vektor $\mathfrak{v}$ polar, so sind beide Produkte Skalare im eigentlichen Sinne, der erste als Produkt zweier polarer, der zweite als Produkt zweier axialer Vektoren. Die obige Formulierung des Stokesschen Satzes ist mithin vom Koordinatensysteme unabhängig, auch dann, wenn man von einem Rechtssysteme zu einem Linkssysteme übergeht.

Beschränkt man sich indessen auf ein Rechtssystem, so entfällt die Unterscheidung polarer und axialer Vektoren; es wird dann der Umlaufssinn des Flächenstückes durch Zuordnung einer bestimmten Normalenrichtung festgelegt, und ebenso wird dem Wirbel mit Hilfe einer Rechtsschraube ein Verrückungsvektor zugeordnet. So gelangt man zu der gewöhnlichen Fassung des Stokesschen Satzes

$$\oint ds\,\mathfrak{v}_s = \int df\,\mathfrak{w}_n. \tag{92a}$$

Die Stokessche Transformation kann dazu dienen, die Definition des Curl eines Vektors allgemeiner und strenger zu fassen, als es im vorigen Paragraphen geschah. Um die Komponente von curl $\mathfrak{v}$ nach irgendeiner Richtung n zu bestimmen, ziehe man eine Kurve s in einer zu n senkrechten Ebene und ordne mit Hilfe einer Rechtsschraube der Fortschreitungsrichtung n einen Umlaufssinn längs der Kurve zu. Man berechne alsdann das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ und teile durch den Flächeninhalt Δf der umschlossenen Fläche. Endlich gehe man zur Grenze über, indem man die Kurve mehr und mehr auf einen Punkt P zusammenzieht. Der Grenzwert, dem der Quotient aus dem Linienintegral von $\mathfrak{v}$ und dem Flächeninhalt Δf der umschlossenen Fläche bei fortgesetzter Verkleinerung des letzteren zustrebt, bestimmt die Komponente von curl $\mathfrak{v}$ nach der Normalenrichtung. Der Stokessche Satz ergibt

$$(93)\quad \mathrm{curl}_n \mathfrak{v} = \lim_{\Delta f = 0} \frac{\oint \mathfrak{v}_s ds}{\Delta f} = \mathfrak{w}_x \cos(nx) + \mathfrak{w}_y \cos(ny) + \mathfrak{w}_z \cos(nz),$$

wobei
$$\mathfrak{w}_x = \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} \text{ usw.}$$

die im vorigen Paragraphen angegebenen Werte besitzen.

Diese Definition ist allgemeiner als die im vorigen Paragraphen zugrunde gelegte, erstens weil sie nicht mit Rechtecken, sondern mit beliebig gestalteten ebenen Flächenstücken operiert, und zweitens, weil diese nicht in die Koordinatenebenen zu fallen brauchen. Läßt man sie mit diesen zusammenfallen, so erhält man als Komponenten von curl $\mathfrak{v}$ die Größen $\mathfrak{w}_x$, $\mathfrak{w}_y$, $\mathfrak{w}_z$ des vorigen Paragraphen wieder. Läßt man die Stellung der Ebene beliebig, so besagt (93), daß die Komponente von curl $\mathfrak{v}$ nach irgendeiner Richtung aus den Komponenten nach den Koordinatenachsen wirklich nach den für Vektorkomponenten gültigen Regeln zu berechnen ist. Den Betrag des Vektors $\mathfrak{w}$ wollen wir weiterhin kurz die „Wirbelstärke" nennen.

Man kann nunmehr den Stokesschen Satz anschaulich deuten, indem man die Fläche f in kleine, als eben anzusehende Stücke zerlegt und $df\mathfrak{w}_n$ nach der Definition (93) durch das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ längs der Randkurve ersetzt. Diejenigen Kurvenstücke, welche zwei Flächenstücke begrenzen, sind zweimal im entgegengesetzten Sinne zu durchlaufen; es heben sich daher die entsprechenden Linienintegrale auf, und es bleibt nur das über die Randkurve der ganzen Fläche erstreckte Integral übrig.

Aus dem Stokesschen Satze folgt: Die Normalkomponente von curl $\mathfrak{v}$, integriert über eine geschlossene Fläche, ist Null. In der Tat, trennen wir die geschlossene Fläche durch eine Kurve s in zwei ungeschlossene Teile und legen etwa n in Richtung der äußeren Normalen der ganzen Fläche, so ersetzt der Stokessche Satz die über die ungeschlossenen Flächen erstreckten Integrale durch zwei Linienintegrale, die längs der Randkurve in entgegengesetztem Sinne zu erstrecken sind. Es verschwindet mithin das über die geschlossene Fläche erstreckte Integral von $\mathrm{curl}_n \mathfrak{v}$; nach der Definition der Divergenz gilt daher

$$(94)\qquad \mathrm{div}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{v} = 0,$$

eine Beziehung, die durch Ausrechnen sofort zu bestätigen ist. Aus ihr folgt umgekehrt mit Hilfe des Gaußschen Satzes

$$\int df \, \mathrm{curl}_n \, \mathfrak{v} = 0 \tag{94a}$$

für eine geschlossene Fläche.

Da nach (94) der Wirbel $\mathfrak{w}$ ein quellenfreier Vektor ist, so kann man ein unendliches Wirbelfeld vollständig in dünne Röhren teilen, derart, daß der Vektor $\mathfrak{w}$ überall tangentiell zu der Röhrenwand weist, und daß für alle Querschnitte einer bestimmten Röhre das Produkt aus Querschnitt q und Wirbelstärke $|\mathfrak{w}|$ konstant ist. Diese Röhren werden vielfach als „Wirbelfäden", das Produkt $q\,|\mathfrak{w}|$ als „Moment des Wirbelfadens" bezeichnet. Die Wirbelfäden können im Innern der Flüssigkeit weder beginnen noch endigen.

Die Formel (94) legt die Frage nahe, welche Bedeutung dem Vektor curl curl $\mathfrak{v}$ zukommt. Die Ausrechnung ergibt als x-Komponente

$$\frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z}\right) - \nabla^2 \mathfrak{v}_x = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathfrak{v} - \nabla^2 \mathfrak{v}_x .$$

Schreiben wir kurz für den Vektor, dessen Komponenten $\nabla^2 \mathfrak{v}_x$, $\nabla^2 \mathfrak{v}_y$, $\nabla^2 \mathfrak{v}_z$ sind, $\nabla^2 \mathfrak{v}$, so können wir die Gleichung für die x-Komponente und die entsprechenden für die y- und z-Komponenten zusammenfassen zu der Vektorgleichung

$$\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{v} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} - \nabla^2 \mathfrak{v} . \tag{95}$$

§ 21. Berechnung des quellenfreien Vektorfeldes aus dem Wirbelfelde.

Wir wollen in diesem Abschnitte von einem stetigen, quellenfreien Vektorfelde reden; wir stellen dasselbe dem in § 16 behandelten wirbelfreien Felde gegenüber. Dort war

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 4\pi\varrho , \qquad \mathrm{curl}\,\mathfrak{v} = 0 .$$

Hier wollen wir, um die Analogie vollständig zu machen, den

Wirbel $\mathfrak{w}$ des vorigen Paragraphen gleich $4\pi\mathfrak{c}$ setzen, so daß man hat

$$\text{curl}\,\mathfrak{v} = 4\pi\mathfrak{c}, \qquad \text{div}\,\mathfrak{v} = 0. \tag{96}$$

Es mag nun die Aufgabe gestellt sein, aus dem Felde des Vektors $\mathfrak{c}$, der die Wirbelverteilung bestimmt, den für die quellenfreie Strömung maßgebenden Vektor $\mathfrak{v}$ zu berechnen, dessen Feld als stetig betrachtet wird: wir setzen voraus, daß die Wirbel durchweg in einem endlichen Bereiche liegen, so daß der Vektor $\mathfrak{c}$ außerhalb dieses Bereiches verschwindet. Es kann das Feld eines Vektors $\mathfrak{c}$ nur dann als Wirbelfeld betrachtet werden, wenn durchweg $\text{div}\,\mathfrak{c} = 0$ ist; sonst wäre es nach (94) unmöglich, den Vektor $\mathfrak{v}$ der ersten Gleichung (96) gemäß zu bestimmen. Schreibt man nun das Feld $\mathfrak{c}$ diesen Bedingungen entsprechend vor, so entsteht die Frage, ob durch (96) das Strömungsfeld $\mathfrak{v}$ eindeutig bestimmt ist. Das ist es nun in der Tat. Würden etwa zwei Felder $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ den Bedingungen (96) Genüge leisten, so wäre das Feld $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2$ zugleich quellenfrei und wirbelfrei; wir haben aber bereits in § 16 gezeigt, daß ein solches Feld durchweg Null ist, also $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ nicht verschieden sein können. Wie dort das wirbelfreie Feld durch die Quellen eindeutig bestimmt war, so ist jetzt das quellenfreie Feld eindeutig durch die Wirbel bestimmt.

Die Bedingung der wirbelfreien Strömung $\text{curl}\,\mathfrak{v} = 0$ wurde erfüllt, indem $\mathfrak{v}$ als negativer Gradient eines skalaren Potentiales dargestellt wurde, das sich aus dem Quellenfelde berechnen ließ. In ähnlicher Weise genügen wir jetzt der Bedingung der quellenfreien Strömung $\text{div}\,\mathfrak{v} = 0$, indem wir setzen

$$\mathfrak{v} = \text{curl}\,\mathfrak{A}. \tag{97}$$

Aus (94) folgt, daß die Bedingung $\text{div}\,\mathfrak{v} = 0$ dann erfüllt ist. Den neuen Hilfsvektor $\mathfrak{A}$ wollen wir das „Vektorpotential" des quellenfreien Feldes nennen.

Das Vektorpotential kann natürlich bis zu einem gewissen Grade willkürlich bestimmt werden, ebenso wie das skalare Potential. Im skalaren Potentiale war eine additive Konstante willkürlich, die bei Bildung des Gradienten fortfiel. Ähnlich wird zu $\mathfrak{A}$ ein wirbelfreier Vektor hinzutreten können, der bei der Berechnung des Curl herausfällt. Wir wollen diese Willkür heben,

indem wir das Vektorpotential der einschränkenden Bedingung

$$\text{div}\,\mathfrak{A} = 0 \tag{98}$$

unterwerfen. Die Beziehungen (97, 98), die $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{v}$ verknüpfen, entsprechen durchaus den Gleichungen (96), die $\mathfrak{v}$ aus $4\pi\mathfrak{c}$ bestimmen. Der oben gegebene Eindeutigkeitsbeweis zeigt, daß $\mathfrak{A}$, falls es im Unendlichen verschwindet, durch $\mathfrak{v}$ eindeutig bestimmt ist, ebenso wie $\mathfrak{v}$ durch $4\pi\mathfrak{c}$. Es muß daher auch $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{c}$ eindeutig bestimmt sein.

Um nun das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ aus dem Wirbelfelde $\mathfrak{c}$ zu berechnen, setzen wir (97) in (96) ein und erhalten

$$\text{curl curl}\,\mathfrak{A} = 4\pi\mathfrak{c}.$$

Wenden wir aber die Rechnungsregel (95) auf $\mathfrak{A}$ an und beachten, daß nach (98) $\text{div}\,\mathfrak{A} = 0$ ist, so folgt:

$$4\pi\mathfrak{c} = -\nabla^2\mathfrak{A}. \tag{99}$$

Diese Gleichung ergibt drei Gleichungen für die Komponenten

$$4\pi\mathfrak{c}_x = -\nabla^2\mathfrak{A}_x \text{ usf.,}$$

welche durchaus der Gleichung

$$4\pi\varrho = -\nabla^2\varphi$$

entsprechen, die das skalare Potential φ mit der Quellenverteilung ϱ des wirbelfreien Feldes verknüpft. Diese Analogie führt sofort zu den Ausdrücken für die Komponenten des Vektorpotentiales, die dem Ausdruck (83) des skalaren Potentiales entsprechen

$$\mathfrak{A}_x = \int \frac{dv}{r}\mathfrak{c}_x, \quad \mathfrak{A}_y = \int \frac{dv}{r}\mathfrak{c}_y, \quad \mathfrak{A}_z = \int \frac{dv}{r}\mathfrak{c}_z.$$

Die drei Gleichungen für die Komponenten ersetzen wir durch die Vektorgleichung

$$\mathfrak{A} = \int \frac{dv\,\mathfrak{c}}{r}. \tag{100}$$

Es steht noch der Nachweis aus, daß der so bestimmte Vektor $\mathfrak{A}$ wirklich der Bedingung (98) Genüge leistet. Um ihn zu führen, berechnen wir

$$\text{div}\,\mathfrak{A} = \int dv \left\{ \mathfrak{c}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathfrak{c}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathfrak{c}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right\} = \int dv \left(\mathfrak{c}\nabla_a \frac{1}{r} \right).$$

Es ist natürlich der Aufpunktgradient, der hier zunächst eingeht.

Mit Rücksicht auf die Gleichung (78) des § 15 können wir ihn indessen durch den negativen Quellpunktgradienten ersetzen. Über das Wirbelfeld soll also das Integral

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = -\int dv \left(\mathfrak{c} \nabla_q \frac{1}{r}\right)$$

erstreckt werden.

Der Integrand läßt sich mit Hilfe der Rechnungsregel (65) umformen; dieselbe ergibt nämlich

$$-\mathfrak{c} \nabla_q \frac{1}{r} = -\operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{c}}{r}\right) + \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathfrak{c};$$

da ferner $\operatorname{div} \mathfrak{c} = 0$ eine wesentliche Eigenschaft des Wirbelfeldes ist, so folgt:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = -\int dv \operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{c}}{r}\right),$$

wo jetzt das Raumintegral der Divergenz über das Wirbelfeld mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral umzuformen ist, das sich auf die Begrenzungsfläche des Wirbelfeldes bezieht.

Wir legen die Fläche f so, daß sie das ganze Wirbelsystem einschließt; dann ist auf ihr $\mathfrak{c}_n = 0$, und daher

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = -\int \frac{df \mathfrak{c}_n}{r} = 0. \tag{101}$$

Von Null verschieden würde nämlich $\mathfrak{c}_n$ nur dann sein können, wenn die Fläche f Wirbelfäden durchschneiden würde; alsdann würde aber f nicht das ganze Wirbelsystem einschließen; denn wie wir im vorigen Paragraphen sahen, können die Wirbelfäden im Innern der Flüssigkeitsströmung nicht endigen. Falls die Fläche f das ganze Wirbelsystem einschließt, ist auf ihr die senkrechte Wirbelkomponente durchweg gleich Null.

Es folgt also in der Tat: Wird das Vektorpotential (100) aus dem gesamten Wirbelsystem berechnet, so verschwindet $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ im ganzen Felde.

Für das Folgende ist eine allgemeine Rechnungsregel wichtig, die sich auf die Divergenz des Vektorproduktes bezieht. Es ist

$$\operatorname{div}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{B}_y\mathfrak{C}_z - \mathfrak{B}_z\mathfrak{C}_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{B}_z\mathfrak{C}_x - \mathfrak{B}_x\mathfrak{C}_z)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{B}_x\mathfrak{C}_y - \mathfrak{B}_y\mathfrak{C}_x) =$$
$$- \mathfrak{B}_x\left(\frac{\partial\mathfrak{C}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{C}_y}{\partial z}\right) - \mathfrak{B}_y\left(\frac{\partial\mathfrak{C}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{C}_z}{\partial x}\right) - \mathfrak{B}_z\left(\frac{\partial\mathfrak{C}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{C}_x}{\partial y}\right)$$
$$+ \mathfrak{C}_x\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial y}\right) + \mathfrak{C}_y\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{B}_z}{\partial x}\right) + \mathfrak{C}_z\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial y}\right),$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$(102) \qquad \operatorname{div}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{C} \operatorname{curl} \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{C}.$$

Diese für beliebige Vektoren $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gültige Beziehung läßt sich durch Anwendung des Gaußschen Satzes sofort in eine Raum- und Flächenintegrale verknüpfende Gleichung umwandeln:

$$(102\text{a}) \qquad \int df[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]_n = \int dv\,\mathfrak{C} \operatorname{curl} \mathfrak{B} - \int dv\,\mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{C}.$$

Ein bemerkenswerter Sonderfall dieser Formel ergibt sich, wenn einer der beiden Vektoren, etwa $\mathfrak{C}$, im ganzen Felde nach Richtung und Betrag konstant gesetzt wird; dann ist curl $\mathfrak{C}$ gleich Null. Setzen wir nun, gemäß Regel (22), indem wir unter $\mathfrak{n}$ einen in Richtung der äußeren Normalen von f weisenden Einheitsvektor verstehen:

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]_n = \mathfrak{n}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{n}\mathfrak{B}],$$

so folgt

$$\mathfrak{C}\int df[\mathfrak{n}\mathfrak{B}] = \mathfrak{C}\int dv \operatorname{curl} \mathfrak{B},$$

und da dies für beliebige Richtung des konstanten Vektors $\mathfrak{C}$ gelten soll:

$$(102\text{b}) \qquad \int df[\mathfrak{n}\mathfrak{B}] = \int dv \operatorname{curl} \mathfrak{B},$$

eine Regel, der eine gewisse Analogie zum Gaußschen Satze zukommt.

Eine zweite Anwendung von (102a) betrifft die Energie des Strömungsfeldes

$$T = \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{v}^2 = \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{v} \operatorname{curl} \mathfrak{A}.$$

Wir erhalten hierfür aus (102a)

$$T = \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{v} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{v} - \int df[\mathfrak{v}\mathfrak{A}]_n.$$

Da im Unendlichen $\mathfrak{A}$ mindestens von erster Ordnung, $\mathfrak{v}$ daher mindestens von zweiter Ordnung verschwindet, so wird das Flächenintegral Null, wenn man die Fläche f ins Unendliche rücken läßt, und es folgt aus (96)

$$T = \frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{c}\mathfrak{A}). \tag{103}$$

Die lebendige Kraft der Strömung drückt sich für das quellenfreie Feld durch das Integral über das halbe innere Produkt aus $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{A}$ aus, ganz ähnlich, wie für das wirbelfreie Feld sie sich (Gl. 84) durch das Integral über das halbe Produkt aus ϱ und φ ausdrückte. Dort erschien sie als ein über das Quellengebiet, hier erscheint sie als ein über das Wirbelgebiet erstrecktes Integral.

§ 22. Flächenhaft verteilte Wirbel.

Ein Feld, welches von einer Unstetigkeitsfläche durchschnitten wird, kann nur dann als quellenfrei gelten, wenn nicht nur in den stetigen Teilen des Feldes die Divergenz div $\mathfrak{v}$, sondern auch auf der Unstetigkeitsfläche f_{12} (vgl. Fig. 11 auf S. 53) die Flächendivergenz von $\mathfrak{v}$ verschwindet, d. h. wenn die Normalkomponente von $\mathfrak{v}$ stetig die Fläche f_{12} durchsetzt.

Die einfachste Unstetigkeit des durchweg quellenfreien Feldes ist ein Sprung der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{v}$. Liegt ein solcher vor, so sagen wir, die Fläche sei der Sitz eines „Flächenwirbels". Um ein genaues Maß für diesen zu erhalten, gehen wir auf unsere Definition des Wirbels zurück, als Grenzwert des Quotienten aus Linienintegral von $\mathfrak{v}$ und Flächeninhalt der umschlungenen Fläche. Freilich müssen wir hier, wo es sich um flächenhaft verteilte Wirbel handelt, das Maß der Wirbelstärke nicht durch den Quotienten aus einem Linienintegral und einer Fläche, sondern aus einem Linienintegral und einer Länge nehmen, ähnlich wie die Divergenz als Ergiebigkeit pro Volumeinheit, die Flächendivergenz hingegen als Ergiebigkeit pro Flächeneinheit definiert war. Wir lassen nun die (xy)-Ebene mit der Tangentialebene in dem betreffenden Punkte der Fläche zusammen-

fallen, die z-Achse mit derjenigen Normalenrichtung, die von (2) nach (1) weist, und die im § 17 durch den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ bestimmt worden ist.

Wir legen ferner ein kleines Rechteck in der (yz)-Ebene, das von der Unstetigkeitsfläche halbiert wird, und umlaufen es, indem wir zunächst auf der Seite (2) parallel der y-Achse, dann von (2) nach (1) parallel der z-Achse, sodann auf der Seite (1) parallel der negativen y-Achse und von (1) nach (2) parallel der negativen z-Achse gehen. Läßt man die Länge der zur y-Achse parallelen Seiten Δy konstant, verkleinert aber die beiden anderen mehr und mehr, so wird der Wert des längs des beschriebenen Weges erstreckten Linienintegrales

$$\oint \mathfrak{v}_s ds$$

gleich

$$(\mathfrak{v}_{y2} - \mathfrak{v}_{y1}) \Delta y.$$

Dividiert man durch Δy und geht zur Grenze über, so erhält man die x-Komponente des Flächenwirbels

$$\mathfrak{v}_{y2} - \mathfrak{v}_{y1}.$$

In entsprechender Weise folgt die y-Komponente

$$\mathfrak{v}_{x1} - \mathfrak{v}_{x2}.$$

Setzen wir den Flächenwirbel gleich $4\pi\mathfrak{g}$, so hat man die Vektorgleichung

$$4\pi\mathfrak{g} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2]. \tag{104}$$

Man kann den soeben angedeuteten Grenzübergang derart abändern, daß man das Wirbelfeld zuerst zwischen zwei zu f_{12} parallele Flächen einschließt und dann durch Annäherung dieser beiden Flächen an f_{12} zum Grenzfalle des Flächenwirbels übergeht. Dabei entwickelt sich aus dem räumlich verteilten Wirbel, in dem die Geschwindigkeitskomponenten noch endliche Differentialquotienten besitzen, die Unstetigkeitsfläche, längs deren die Flüssigkeitsschichten mit verschiedenen Geschwindigkeiten aneinander vorbeigleiten. Es liegt nahe, in diesem Falle, entsprechend der Gleichung (100), das Vektorpotential des Flächenwirbels folgendermaßen zu bestimmen

$$\mathfrak{A} = \int df_{12} \frac{\mathfrak{g}}{r}. \tag{105}$$

Wir wollen diese Formel noch auf einem anderen Wege begründen. Wir gehen aus von dem im § 17 gewonnenen Ergebnis, daß das skalare Potential eines flächenhaft verteilten Quellensystemes

$$\varphi = \int df_{12} \frac{\omega}{r}$$

ist, wenn φ selbst auf der Fläche stetig ist, die normale Ableitung aber den durch Gleichung (85) definierten Sprung

$$4\pi\omega = \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_2}$$

erfährt. Haben wir es mit einer Unstetigkeitsfläche im quellenfreien Felde zu tun, bei deren Durchquerung das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ selbst sich stetig verhält, aber die Ableitungen von $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ gewisse Sprünge erfahren

$$4\pi\mathfrak{g}_x = \frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial n_1} + \frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial n_2}, \quad 4\pi\mathfrak{g}_y = \frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial n_1} + \frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial n_2}, \quad 4\pi\mathfrak{g}_z = \frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial n_1} + \frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial n_2},$$

so wird die Formel (105) gelten; denn zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche befriedigen das skalare Potential wie die Komponenten des Vektorpotentiales die Laplacesche Gleichung.

Es ist nur der Nachweis erforderlich, daß diese Größen $\mathfrak{g}_x$, $\mathfrak{g}_y$, $\mathfrak{g}_z$, die sich zunächst auf ein beliebiges Koordinatensystem beziehen, die Komponenten eben des Vektors $\mathfrak{g}$ sind, den wir in (104) erhalten haben. Um ihn zu führen, spezialisieren wir das Koordinatensystem in derselben Weise wie oben, indem wir setzen

$$\frac{\partial}{\partial n_2} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial z}$$

und wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{A}$ bei Durchquerung der Fläche

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial y}\right)_1 = \left(\frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial y}\right)_2.$$

Man erhält dann

$$4\pi\mathfrak{g}_x = \left(\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial z}\right)_2 - \left(\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial z}\right)_1 = \left(\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)_1,$$

$$4\pi\mathfrak{g}_y = \left(\frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial z}\right)_2 - \left(\frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial z}\right)_1 = \left(\frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial z}\right)_1 - \left(\frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial z}\right)_2,$$

woraus wegen $\mathfrak{v} = \text{curl}\,\mathfrak{A}$ folgt

$$4\pi\mathfrak{g}_x = \mathfrak{v}_{y2} - \mathfrak{v}_{y1}, \quad 4\pi\mathfrak{g}_y = \mathfrak{v}_{x1} - \mathfrak{v}_{x2}$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung (104).

Das Verschwinden der dritten, zur Unstetigkeitsfläche normalen Komponente des Flächenwirbels, das aus den allgemeinen Sätzen über Wirbelfäden folgt, hängt mit dem Verschwinden von div $\mathfrak{A}$ zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche zusammen.

Der Doppelschicht von Quellen entgegengesetzt gleicher Ergiebigkeit würde hier eine Doppelschicht von Flächenwirbeln entsprechen, dem Sprunge des skalaren Potentiales ein Sprung des Vektorpotentiales. Ein Beispiel wäre eine strömende, sehr dünne Flüssigkeitsschicht, an die beiderseits ruhende Flüssigkeit angrenzt. Beim Durchqueren der Schicht springt die Geschwindigkeit auf einen endlichen Wert und sinkt dann wieder auf Null. Dabei wäre, um einen endlichen Sprung von $\mathfrak{A}$ zu erhalten, die Geschwindigkeit in der Schicht unendlich zu machen, derart, daß beim Grenzübergang das Produkt aus Geschwindigkeit und Dicke der Schicht einem endlichen Werte zustrebt. Es ist jedoch der Grenzfall eben wegen der erforderlichen unendlichen Geschwindigkeit nicht strenge zu verwirklichen, ebensowenig wie eine Doppelschicht von Quellen, innerhalb deren die normale Komponente der Geschwindigkeit unendlich werden müßte. Beides sind mathematische Abstraktionen, die nur bei der Darstellung des Feldes in einiger Entfernung von der Schicht in Betracht kommen.

§ 23. Zerlegung eines beliebigen Vektorfeldes in ein quellenfreies und ein wirbelfreies Feld.

Es sei jetzt ein beliebiges unbegrenztes Vektorfeld $\mathfrak{v}$ gegeben; dasselbe sei im allgemeinen stetig; nur beim Durchschreiten gewisser Flächen mögen die Komponenten von $\mathfrak{v}$ sich unstetig ändern. Es soll jedoch $\mathfrak{v}$ stets endlich sein, auch auf den Unstetigkeitsflächen; durch diese Festsetzung werden Doppelschichten von Quellen oder Wirbeln von der Betrachtung ausgeschlossen. Die Quellen und Wirbel des Strömungsfeldes mögen durchweg im Endlichen liegen.

Dieses Feld läßt sich als Zusammensetzung eines wirbelfreien Feldes $\mathfrak{v}'$ und eines quellenfreien Feldes $\mathfrak{v}''$ darstellen, und zwar

nur auf eine einzige Weise. Das Feld $\mathfrak{v}'$ werde so bestimmt, daß im ganzen Raume seine Divergenz und auf etwaigen Unstetigkeitsflächen f_{12} seine Flächendivergenz derjenigen des gegebenen Vektorfeldes gleich sei,

$$\operatorname{div} \mathfrak{v}' = \operatorname{div} \mathfrak{v} = 4\pi\varrho\,, \qquad -(\mathfrak{v}'_{n1} + \mathfrak{v}'_{n2}) = -(\mathfrak{v}_{n1} + \mathfrak{v}_{n2}) = 4\pi\omega\,.$$

Hierdurch ist das wirbelfreie Feld $\mathfrak{v}'$ eindeutig bestimmt. Es ist nach den Vorschriften der §§ 16, 17 mit Hilfe des skalaren Potentiales φ zu berechnen, das auf f_{12} stetig ist, da ja Doppelschichten ausgeschlossen sind

$$(106) \qquad \mathfrak{v}' = -\nabla\varphi\,, \qquad \varphi = \int \frac{dv\varrho}{r} + \int \frac{df_{12}\,\omega}{r}\,.$$

Der Vektor $\mathfrak{v} - \mathfrak{v}' = \mathfrak{v}''$ ist jetzt quellenfrei; er ist, wie im § 21 bewiesen wurde, eindeutig durch die Wirbelverteilung bestimmt, die sich auf den Unstetigkeitsflächen auch als Flächenwirbel (§ 22) darstellen kann; räumliche und flächenhafte Wirbelverteilung von $\mathfrak{v}''$ fällt mit derjenigen von $\mathfrak{v}$ zusammen, da ja $\mathfrak{v}'$ wirbelfrei ist:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{v}'' = \operatorname{curl} \mathfrak{v} = 4\pi\mathfrak{c}\,, \qquad [\mathfrak{n}, \mathfrak{v}_1'' - \mathfrak{v}_2''] = [\mathfrak{n}, \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2] = 4\pi\mathfrak{g}\,.$$

Es wird mithin

$$(107) \qquad \mathfrak{v}'' = \operatorname{curl} \mathfrak{A}\,, \qquad \mathfrak{A} = \int \frac{dv\,\mathfrak{c}}{r} + \int \frac{df_{12}\,\mathfrak{g}}{r}\,.$$

Durch (106), (107) ist das Vektorfeld $\mathfrak{v}$ in seinen wirbelfreien und seinen quellenfreien Bestandteil zerlegt. Für ein unbegrenztes Feld ist diese Zerlegung nur auf eine einzige Weise möglich.

Hat man es mit einem begrenzten Vektorfelde zu tun, so ist die Zerlegung im allgemeinen auf vielerlei Weisen möglich. Denn denkt man es sich zu einem den unendlichen Raum erfüllenden Felde ergänzt, so kann man in dem hinzugefügten Felde die Verteilung der Quellen und Wirbel bis zu einem gewissen Grade willkürlich wählen, ohne das ursprüngliche Feld dadurch zu ändern. Grenzt man etwa in einem Vektorfelde einen Bereich ab, in dem weder Quellen noch Wirbel liegen, so kann man innerhalb dieses Bereiches das Feld nach Belieben entweder aus einem Vektorpotential oder aus einem skalaren Potential ableiten;

die erstere Darstellung würde der Annahme von Wirbeln außerhalb des Bereiches, die zweite der Annahme von Quellen entsprechen. Ein Beispiel dieser Art werden wir im nächsten Abschnitte kennen lernen.

Wir kehren zum unbegrenzten Felde zurück und stellen die Aufgabe, die Energie dieses Feldes zu berechnen. Indem wir der idealen Flüssigkeit unserer hydrodynamischen Abbildung wiederum die Dichte $\frac{1}{4\pi}$ zuschreiben, erhalten wir für die gesamte lebendige Kraft des Strömungsfeldes

$$T = \frac{1}{8\pi}\int dv\, \mathfrak{v}^2 = \frac{1}{8\pi}\int dv \{\mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{v}''^2 + 2\mathfrak{v}'\mathfrak{v}''\}.$$

Wir untersuchen zuerst das dritte Glied, das sich als ein über den ganzen Raum erstrecktes Integral aus dem wirbelfreien Vektor
$$\mathfrak{v}' = -\nabla\varphi$$
und dem quellenfreien Vektor $\mathfrak{v}''$ darstellt. Berücksichtigt man
$$\operatorname{div}\mathfrak{v}'' = 0,$$
so ergibt die Formel (65)
$$\operatorname{div}\varphi\mathfrak{v}'' = \mathfrak{v}''\nabla\varphi = -\mathfrak{v}'\mathfrak{v}''.$$

Bei der Berechnung des Raumintegrales

$$\int dv\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'' = -\int dv \operatorname{div}\varphi\mathfrak{v}''$$

dürfen wir nicht ohne weiteres über die Unstetigkeitsflächen hinweg integrieren, wir haben vielmehr den Raum in Gebiete zu zerlegen, innerhalb deren das Feld stetig ist. Zu den Begrenzungsflächen gehören die Unstetigkeitsflächen f_{12}. Jedes Stück derselben kommt zweimal vor als Begrenzung der beiderseits liegenden Gebiete (Fig. 11). Daher ergibt der Gaußsche Satz

$$\int dv\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'' = -\int df_{12}\{\varphi_1\mathfrak{v}''_{n1} + \varphi_2\mathfrak{v}''_{n2}\} - \int df\varphi\mathfrak{v}_n''.$$

Das erste, über die Unstetigkeitsfläche erstreckte Integral verschwindet, denn es ist $\varphi_1 = \varphi_2$, da Doppelschichten ausgeschlossen waren, und

$$\mathfrak{v}''_{n1} + \mathfrak{v}''_{n2} = 0,$$

weil der Vektor $\mathfrak{v}''$ quellenfrei ist. Das zweite Integral, welches über die unendlich entfernte, das ganze Feld einschließende Fläche zu erstrecken ist, verschwindet, und zwar mindestens von der ersten Ordnung. Mithin ist

$$\int dv\,\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'' = 0,$$

es gilt folgender wichtige Satz: Das über den ganzen Raum erstreckte Integral des inneren Produktes aus einem quellenfreien und einem wirbelfreien Vektor ist Null.

Nunmehr wird die lebendige Kraft der Strömung

$$T = \frac{1}{8\pi}\int dv\,\mathfrak{v}'^2 + \frac{1}{8\pi}\int dv\,\mathfrak{v}''^2 = T' + T''. \tag{108}$$

Die Energie eines Strömungsfeldes stellt sich dar als Summe der Energien des wirbelfreien und des quellenfreien Bestandteiles.

Für stetige Felder hatten wir die Berechnung der Energie durchgeführt, sowohl für wirbelfreie (84) wie für quellenfreie Felder (103). Unter Berücksichtigung der Flächendivergenz und des Flächenwirbels gestaltet sich jetzt die Berechnung von T' bzw. T'' folgendermaßen

$$T' = \frac{1}{8\pi}\int dv\,\mathfrak{v}'^2 = -\frac{1}{8\pi}\int dv\,\mathfrak{v}'\nabla\varphi$$

wird mit Hilfe von (65) umgeformt in

$$T' = \frac{1}{8\pi}\int dv\,\varphi\,\operatorname{div}\mathfrak{v}' - \frac{1}{8\pi}\int dv\,\operatorname{div}\varphi\mathfrak{v}'.$$

Das erste Glied ergibt

$$\frac{1}{2}\int dv\,\varphi\varrho;$$

das zweite wird wiederum mit Hilfe des Gaußschen Satzes umgeformt; der Beitrag der das ganze unendliche Feld einschließenden Fläche verschwindet, und es bleibt nur der Beitrag der Unstetigkeitsflächen übrig, die als Begrenzungsflächen der stetigen Gebiete des Feldes auftreten; dieser Beitrag ist

$$-\int \frac{df_{12}}{8\pi}\,\varphi\,(\mathfrak{v}'_{n1} + \mathfrak{v}'_{n2}) = \frac{1}{2}\int df_{12}\,\varphi\,\omega.$$

Es wird daher

$$T' = \frac{1}{2}\int dv\varrho\varphi + \frac{1}{2}\int df_{12}\omega\varphi. \tag{108a}$$

In ähnlicher Weise wird

$$T'' = \frac{1}{8\pi}\int dv\,\mathfrak{v}''^2 = \frac{1}{8\pi}\int dv\mathfrak{v}''\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}$$

mit Hilfe der Rechnungsregel (102) umgeformt in

$$T'' = \frac{1}{2}\int dv\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \frac{1}{8\pi}\int dv\,\mathrm{div}\,[\mathfrak{A}\mathfrak{v}''].$$

Das Raumintegral der Divergenz wird wieder mit Hilfe des Gaußschen Satzes in eine Summe von Flächenintegralen umgewandelt, wobei die Komponente des Vektorproduktes $[\mathfrak{A}\mathfrak{v}'']$ in Richtung der Normalen der Unstetigkeitsfläche f_{12} auftritt. Es gilt

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{v}'']_{n1} = -\mathfrak{n}[\mathfrak{A}_1\mathfrak{v}_1''],$$

hingegen

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{v}'']_{n2} = \mathfrak{n}[\mathfrak{A}_2\mathfrak{v}_2''];$$

denn $\mathfrak{n}$ sollte ein Einheitsvektor sein, welcher die von 2 nach 1 weisende Normalenrichtung darstellt (Fig. 11 auf S. 53). Die Rechnungsregel (23) ergibt nun

$$-\mathfrak{n}[\mathfrak{A}_1\mathfrak{v}_1''] = \mathfrak{A}_1[\mathfrak{n}\mathfrak{v}_1'']; \quad \mathfrak{n}[\mathfrak{A}_2\mathfrak{v}_2''] = -\mathfrak{A}_2[\mathfrak{n}\mathfrak{v}_2''].$$

Daher wird

$$\frac{1}{8\pi}\int dv\,\mathrm{div}\,[\mathfrak{A}\mathfrak{v}''] = \frac{1}{8\pi}\int df_{12}\{\mathfrak{A}_1[\mathfrak{n}\mathfrak{v}_1''] - \mathfrak{A}_2[\mathfrak{n}\mathfrak{v}_2'']\};$$

das über die Begrenzung des ganzen Feldes erstreckte Integral verschwindet auch hier. Da Doppelschichten von Wirbeln ausgeschlossen waren, so darf das Vektorpotential auf df_{12} keinen Sprung erfahren; es ist hier

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2, \qquad \text{mithin}$$

$$\mathfrak{A}_1[\mathfrak{n}\mathfrak{v}_1''] - \mathfrak{A}_2[\mathfrak{n}\mathfrak{v}_2''] = \mathfrak{A}\cdot[\mathfrak{n}(\mathfrak{v}_1'' - \mathfrak{v}_2'')] = \mathfrak{A}\,4\pi\mathfrak{g}.$$

Es wird daher schließlich

$$T'' = \frac{1}{2}\int dv\mathfrak{c}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\int df_{12}\mathfrak{g}\mathfrak{A}. \tag{108b}$$

Auch für die Berechnung der Energie des Feldes ersetzt die Flächendivergenz vollständig die räumliche Divergenz, der flächen-

haft verteilte Wirbel den räumlich verteilten. Wir hätten in der Tat die Formeln (108a), (108b) erhalten, wenn wir das Feld zunächst als stetig angesehen hätten und dann zum Grenzfall des unstetigen Feldes übergegangen wären, wobei aus der räumlich verteilten Divergenz die Flächendivergenz, aus dem räumlich verteilten Wirbel der Flächenwirbel entsteht.

§ 24. Die Äquivalenz von Wirbellinie und Doppelschicht.

Wir denken uns wieder ein unbegrenztes, quellenfreies Strömungsfeld. Die Strömung soll von einem einzigen Wirbelfaden von gegebener Leitlinie herrühren; es soll also das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ für jede geschlossene Linie verschwinden, welche den Wirbelfaden nicht umschlingt; für eine geschlossene Linie hingegen, welche den Wirbelfaden umkettet, ergibt der Stokessche Satz

$$\oint \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = \int df\, \mathfrak{w}_n, \qquad \mathfrak{w} = \operatorname{curl} \mathfrak{v}.$$

Wir können die Gestalt der Fläche f bei festgehaltener Randkurve s beliebig ändern, so daß sie den Wirbelfaden in verschiedenen Querschnitten senkrecht durchschneidet. Da hierbei das Linienintegral seinen Wert nicht ändert und da das Flächenintegral gleich dem Momente des Wirbelfadens, d. h. gleich dem Produkte $q|\mathfrak{w}|$ aus Querschnitt und Wirbelstärke sich ergibt, so muß das Moment für alle Querschnitte des Wirbelfadens dasselbe sein. Der Wirbelfaden kann demnach nicht innerhalb der Flüssigkeit endigen; denn gesetzt, dieses wäre der Fall, so könnte man die Fläche f so ausbiegen, daß sie ganz im wirbelfreien Gebiete verläuft, daß mithin das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ gleich Null wird vorhin aber war das über dieselbe Kurve erstreckte Linienintegral durch Betrachtung einer den Wirbelfaden schneidenden Fläche von Null verschieden gefunden worden. Das ist ein Widerspruch, der nur vermieden wird, indem der Wirbelfaden beiderseits ins Unendliche läuft oder eine im Endlichen verlaufende, geschlossene Leitlinie besitzt.

Wir verringern nun den Querschnitt des Wirbelfadens und vergrößern zugleich die Wirbelstärke innerhalb des Fadens der-

art, daß das Produkt aus beiden Größen, das Moment des Wirbelfadens, konstant bleibt. Dann schrumpft der Wirbelfaden zusammen und geht im Grenzfall in eine Wirbellinie über, von dem Momente

$$\lim_{q=0} q|\mathfrak{w}| = 4\pi \lim_{q=0} q|\mathfrak{c}| = 4\pi\tau .$$

Nach dem Stokesschen Satze gilt für jede die Wirbellinie einmal umschlingende Kurve

$$\oint \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = 4\pi\tau .$$

Das Vektorpotential dieser Wirbellinie wird gegeben durch den aus (100) hervorgehenden Ausdruck

$$\mathfrak{A} = \tau \oint \frac{d\mathfrak{s}}{r} . \tag{109}$$

Hierbei stellt das gerichtete Linienstück $d\mathfrak{s}$ die Richtung der Wirbelachse dar, der sich der Umlaufssinn der Flüssigkeitsbewegung zuordnet, wie der Umlaufssinn der Fortschreitungsrichtung bei einer rechtsgängigen Schraube. In der unmittelbaren Nähe der Wirbellinie wird die Geschwindigkeit der Strömung unendlich; in diesem Gebiete führt die Idealisierung der Aufgabe, die in dem vorgenommenen Grenzübergange liegt, zu unzulässigen Folgerungen. In der Tat kann ein Wirbel von endlichem Momente ebensowenig auf eine mathematische Linie zusammengedrängt werden wie eine Quelle von endlicher Ergiebigkeit auf einen mathematischen Punkt. Wohl aber kann man einen Wirbelfaden von endlichem Querschnitt unter Umständen durch eine Wirbellinie ersetzen, nämlich dann, wenn die Abmessungen des Querschnittes klein sind sowohl gegen die Längsabmessungen des Fadens wie gegen den Abstand des Aufpunktes von den Stücken des Fadens. Hier leistet die Wirbellinie dieselben Dienste, die für das wirbelfreie Feld der Quellpunkt oder die Doppelquelle leistete.

Wir berechnen jetzt nach den Regeln des § 21 die Geschwindigkeit der Strömung, $\mathfrak{v} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$, wobei wir nach den Koordinaten xyz des Aufpunktes zu differentiieren haben; stellt $\mathfrak{r}$ den von $d\mathfrak{s}$ nach dem Aufpunkte hin gezogenen Fahrstrahl vor, $\mathfrak{r}_x$, $\mathfrak{r}_y$, $\mathfrak{r}_z$ seine Komponenten, so wird

$$\mathfrak{v}_x = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} = \tau \oint \left\{ d\mathfrak{s}_z \left(\frac{-\mathfrak{r}_y}{r^3} \right) - d\mathfrak{s}_y \left(\frac{-\mathfrak{r}_z}{r^3} \right) \right\} \text{ usf.}$$

Mithin wird der Vektor $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{v} = \tau \oint \frac{1}{r^3} [d\mathfrak{s}\mathfrak{r}]. \tag{110}$$

Der Geschwindigkeitsvektor in irgendeinem Punkte des Feldes stellt sich hier dar als geometrische Summe von Geschwindigkeiten

$$d\mathfrak{v} = \frac{\tau}{r^3} [d\mathfrak{s}\mathfrak{r}],$$

die von den einzelnen Stücken der Wirbellinie herrühren. Der Beitrag eines jeden Wirbelstückes ist proportional dem Momente $4\pi\tau$ der Wirbellinie, ferner dem umgekehrten Quadrat des Abstandes von Wirbelstück und Aufpunkt und dem Sinus des Winkels, den die Wirbelachse und der nach dem Aufpunkte hin gezogene Fahrstrahl miteinander einschließen; die Richtung von $d\mathfrak{v}$ steht senkrecht auf der Ebene, die durch Wirbelachse und Fahrstrahl gelegt ist. Die Vektoren $d\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$, $d\mathfrak{v}$ folgen aufeinander in dem Sinne wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand. Diese Regel stimmt mit der Ampèreschen Schwimmregel überein, wie man erkennt, wenn man den Daumen der rechten Hand der Richtung vom Fuße zum Kopfe parallel und den Zeigefinger nach vorn streckt; der Mittelfinger weist dann nach links. Wir haben damit das Biot-Savartsche Gesetz gewonnen, welches in der Lehre vom Elektromagnetismus eine so wichtige Rolle spielt. Dabei ist zu beachten, daß die Zerlegung des Ausdruckes (110) in Beiträge der einzelnen Wirbelstücke einigermaßen willkürlich ist; ein Wirbelstück für sich allein kann nicht existieren, sondern nur die geschlossene Wirbellinie als Ganzes; nicht den hypothetischen Beiträgen der einzelnen Wirbelstücke, sondern nur ihrer Vektorsumme (110) kommt eine physikalische Bedeutung zu.

Man kann nun das Feld einer Wirbellinie noch von einem wesentlich anderen Standpunkte aus betrachten. Dasselbe ist nämlich, von der Wirbellinie selbst abgesehen, wirbelfrei und muß sich daher von einem skalaren Potentiale φ ableiten. Freilich ist dieses Potential nicht wie das soeben untersuchte Vektor-

potential einwertig, sondern es nimmt bei jeder Umkreisung der Wirbellinie um $4\pi\tau$ ab. Indessen kann man diese Vieldeutigkeit beseitigen, wenn man irgendeine von der Wirbellinie umrandete Fläche f_{12} legt und diese aus dem Felde ausschließt. Dadurch entsteht ein Feld, welches überall quellenfrei und wirbelfrei ist und f_{12} als Unstetigkeitsfläche besitzt. Diese Unstetigkeitsfläche des wirbelfreien Feldes ist nun nach den Regeln des § 18 zu behandeln. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ selbst hat zu beiden Seiten der Fläche den gleichen Wert; denn die Fläche verläuft ja, von der Randkurve abgesehen, in dem Gebiete der stetigen Strömung. Die Flächendivergenz ist mithin Null. Das Potential hingegen erfährt eine Abnahme

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathfrak{v}_s ds = 4\pi\tau,$$

wenn man, der Strömung der Flüssigkeit folgend, von der Seite (1) der Unstetigkeitsfläche, die Wirbellinie umkreisend, zur Seite (2) gelangt; es wächst um $4\pi\tau$ beim Durchschreiten der Fläche. Diese Unstetigkeit des Potentiales war es, die wir im § 18 durch eine Doppelschicht von Quellen darstellten. Wir zeigten daselbst, daß durch die Unstetigkeiten der Geschwindigkeit und des Potentiales das quellenfreie Feld eindeutig bestimmt ist. Mithin ist das Feld einer Wirbellinie gleich dem Felde einer gleichförmigen Doppelschicht, die auf einer von der Wirbellinie umrandeten Fläche ausgebreitet ist. Dabei ist die positive Seite der Doppelschicht durch die Ampèresche Regel der Wirbellinie zugeordnet. Das vektoriell aufgefaßte Moment der Doppelschicht, das im § 18 mit $\tau\mathfrak{n}$ bezeichnet wurde und das von der negativen nach der positiven Seite der Doppelschicht weist, entspricht dem durch $d\mathfrak{s}$ festgelegten Umlaufssinn längs der Wirbellinie, wie der Fortschreitungssinn der Umlaufsbewegung bei einer Rechtsschraube. Das Moment der Wirbellinie wird durch $4\pi\tau$ dargestellt, wo τ eine stets positive Größe ist.

Wir können jetzt die im § 18 für das Potential einer gleichförmigen Doppelschicht abgeleitete Beziehung (88a)

$$\varphi = \pm\tau\Omega \tag{111}$$

unmittelbar auf den vorliegenden Fall übertragen. Ω stellt dabei den körperlichen Winkel dar, unter dem vom Aufpunkte aus die Doppelschicht erscheint, mit positivem oder negativem Vorzeichen genommen, je nachdem der Aufpunkt sich auf der positiven oder negativen Seite der Doppelschicht befindet. Gehen wir von der Doppelschicht zur äquivalenten Wirbellinie über, so haben wir vom Aufpunkte aus Gerade durch die Punkte der Wirbellinie zu legen und so die Wirbellinie auf die um den Aufpunkt als Mittelpunkt gelegte Einheitskugel zu projizieren; der Flächeninhalt der Projektion ist Ω. Je nachdem der Umlaufssinn um diese Flächenstücke der Einheitskugel durch den Umlaufssinn der Wirbellinie in dem einen oder anderen Sinne bestimmt wird, hat man in (111) $\pm\Omega$ zu setzen. Hiernach ist klar, daß das Potential einer Doppelschicht nur von der Randkurve abhängt. Es erledigt sich auch die Frage nach dem Potential einer Doppelschicht, für deren Stücke der Aufpunkt bald auf der positiven, bald auf der negativen Seite liegt. Hier wird die auf die Einheitskugel projizierte Randkurve sich selbst schneiden und demgemäß die Flächenstücke der Einheitskugel bald in dem einen, bald in dem anderen Sinne umlaufen; danach sind diese mit positivem bzw. negativem Vorzeichen in Rechnung zu ziehen. Endlich wird auch die zu Ende des § 18 gemachte Bemerkung verständlich, daß am Rande der Doppelschicht die angewandte Rechnungsweise unzulässig wird. In der Tat ist hier die Geschwindigkeit der Strömung unendlich, und es ist aus diesem Grunde die Randkurve durch eine Röhre aus dem Felde auszuschließen, wenn man mit einer ungeschlossenen Doppelschicht operiert.

Zeigt die Äquivalenz von Doppelschicht und Wirbellinie manche der Ergebnisse, die für erstere vom Standpunkte des Quellenfeldes aus gewonnen wurden, in neuer Beleuchtung, so gestattet sie anderseits, das Feld der Wirbellinie auf Grund der Theorie der wirbelfreien Felder zu berechnen, ohne das Vektorpotential zu benutzen. Wir wollen diese Ableitung angeben und uns davon überzeugen, daß auch auf diesem Wege die Gleichung (110) erhalten wird. Wir berechnen den Gradienten des Potentiales (111), wobei wir der Einfachheit wegen den Aufpunkt auf

der positiven Seite der zugeordneten Doppelschicht annehmen; dann wird
$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi = -\tau\nabla_a\Omega.$$

Hierbei stellt $\nabla_a\Omega$ die Änderung vor, welche der körperliche Winkel Ω erfährt, wenn der Aufpunkt um die Längeneinheit verschoben wird. Verschiebt man statt dessen die Wirbellinie translatorisch, so ist, da Ω nur von der relativen Lage von Aufpunkt und Wirbellinie abhängt, nach § 15
$$\mathfrak{v} = \tau\nabla_q\Omega$$
zu setzen. Der durch Verrückung des Wirbelfadens bei festgehaltenem Aufpunkte entstehende Zuwachs von Ω setzt sich zusammen aus den Flächeninhalten der auf die Einheitskugel um den Aufpunkt projizierten Flächenstücke, welche die Stücke $d\mathfrak{s}$ der Wirbellinie bei der Verrückung bestreichen; diese Flächenstücke sind so zu behandeln, als ob sie mit Doppelschichten vom Momente 1 belegt wären; ihre Potentiale zusammengenommen ergeben den Zuwachs von Ω. Verschiebt man nun den ganzen Wirbelfaden in der durch den Einheitsvektor $\mathfrak{t}_1$ festgelegten Richtung um die Längeneinheit, so bestreicht das Stück $d\mathfrak{s}$ der Wirbellinie das Parallelogramm
$$[\mathfrak{t}_1 d\mathfrak{s}];$$
die Projektion desselben auf die Einheitskugel wird positiv in Rechnung zu ziehen sein, wenn der jenes Vektorprodukt darstellende, auf der Ebene von $\mathfrak{t}_1$ und $d\mathfrak{s}$ senkrechte Vektor mit dem von $d\mathfrak{s}$ nach dem Aufpunkte hingezogenen Fahrstrahl einen spitzen Winkel einschließt; denn in diesem Falle liegt der Aufpunkt auf der positiven Seite der hinzukommenden Doppelschicht. In dem entgegengesetzten Falle, wo jener Winkel ein stumpfer ist, liegt der Aufpunkt auf der negativen Seite. Beide Fälle faßt man zusammen, indem man den Beitrag, den $d\mathfrak{s}$ zum Zuwachs von Ω liefert, mit Rücksicht auf Formel (22) schreibt
$$\frac{1}{r^3}\mathfrak{r}[\mathfrak{t}_1 d\mathfrak{s}] = \frac{\mathfrak{t}_1}{r^3}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}].$$

Integriert man nun über die Wirbellinie, so folgt
$$\mathfrak{t}_1\oint\frac{1}{r^3}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}]$$

als Zuwachs von Ω bei einer translatorischen Verrückung der Wirbellinie parallel einem beliebigen Einheitsvektor $\mathfrak{k}_1$. Wir erhalten mithin

$$\mathfrak{v} = \tau \nabla_q \Omega = \tau \oint \frac{1}{r^3} [d\mathfrak{s}\mathfrak{r}],$$

eine Formel, die mit (110) übereinstimmt.

Eine andere Methode, die Äquivalenz von Wirbellinie und Doppelschicht nachzuweisen, ist die, daß man dem Felde der Doppelschicht ein Vektorpotential zuordnet und dieses auf die Form (109) bringt. Wir gehen indessen an dieser Stelle hierauf nicht ein.

§ 25. Rechnungsregeln. Die Operation $(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$.

Den Rechnungsregeln, die uns bisher bei der Entwicklung der Theorie der Vektorfelder begegneten, treten noch eine Reihe weiterer Regeln an die Seite.

Wir beginnen mit der Regel für den Curl des Produktes aus einem Skalar v und einem Vektor $\mathfrak{A}$

(112) $$\operatorname{curl} v\mathfrak{A} = v \operatorname{curl} \mathfrak{A} + [\nabla v, \mathfrak{A}],$$

von deren Richtigkeit man sich durch Nachrechnen leicht überzeugt. Ist z. B. $\mathfrak{A}$ der Gradient eines zweiten Skalars p

$$\mathfrak{A} = \nabla p,$$

so ist das Feld von $\mathfrak{A}$ wirbelfrei, mithin

$$\operatorname{curl} \mathfrak{A} = \operatorname{curl} \nabla p = 0;$$

es folgt daher aus (112)

(112a) $$\operatorname{curl} \{v \nabla p\} = [\nabla v, \nabla p].$$

Es wurde bereits in § 15 die Operation $(\mathfrak{A}\nabla)$ auf Skalare angewandt. $(\mathfrak{A}\nabla)\varphi$ gab allgemein den Zuwachs an, den der Skalar φ beim Fortschreiten in der Richtung von $\mathfrak{A}$ erfuhr; derselbe war auf die Längeneinheit zu beziehen und mit dem Betrage von $\mathfrak{A}$ zu multiplizieren. Die gleiche Operation können wir nun auch auf einen Vektor $\mathfrak{B}$ anwenden. Ist $\mathfrak{A}$ ein Einheitsvektor, so stellt $(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$ den auf die Längeneinheit berechneten Zuwachs dar, den der Vektor $\mathfrak{B}$ erfährt, wenn man in seinem Felde in der durch $\mathfrak{A}$ angezeigten Richtung fortschreitet. Ist $\mathfrak{A}$ kein Einheits-

vektor, so geht der Betrag von $\mathfrak{A}$ als Faktor ein. Es sind die *Komponenten von* $(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$:

$$(113)\quad \begin{cases} (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}_x = \mathfrak{A}_x \dfrac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \dfrac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \dfrac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z}, \\ (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}_y = \mathfrak{A}_x \dfrac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \dfrac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \dfrac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z}, \\ (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}_z = \mathfrak{A}_x \dfrac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \dfrac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \dfrac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z}. \end{cases}$$

Wir berechnen jetzt den Vektor

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B}.$$

Seine x-Komponente ist

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_y \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} - \mathfrak{A}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \mathfrak{A}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z}.$$

Durch Vertauschung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ folgt

$$(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A}_x - \mathfrak{B}_x\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_y \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} - \mathfrak{B}_x \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \mathfrak{B}_z \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \mathfrak{B}_x \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}$$

und durch Subtraktion der vorigen Formel von dieser

$$\{(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A}\}_x$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_x) - \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_z).$$

Hier steht rechts die x-Komponente von curl $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$. Es gilt mithin für den *Curl des Vektorproduktes die Rechnungsregel*

$$(114)\quad \mathrm{curl}\,[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A}.$$

Wir berechnen anderseits

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + [\mathfrak{A}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}].$$

Die x-Komponente ist

$$\mathfrak{A}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} + \mathfrak{A}_y \left(\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y}\right) - \mathfrak{A}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x}\right)$$
$$= \mathfrak{A}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x}.$$

Addieren wir hierzu die durch Vertauschung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ entstehende Beziehung, so erhalten wir

$$(115)\quad \nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}].$$

Zweiter Abschnitt.

Das elektrische Feld.

Erstes Kapitel.

Das elektrostatische Feld im Luftraume.

§ 26. Die elektrische Feldstärke.

Reibt man eine Siegellackstange mit einem Stück Katzenfell, so werden diese Körper und der sie umgebende Raum in einen eigentümlichen Zustand versetzt, der sich dadurch kundgibt, daß leichte, in der Nähe befindliche Teilchen in Bewegung geraten; man sagt: jene Körper sind durch Reibung „elektrisch“ geworden, der umgebende Raum ist ein „elektrisches Feld“. Der elektrische Zustand haftet nicht an der Siegellackstange und an dem Katzenfell; er wird auf Metalle, die mit diesen Körpern in Berührung gebracht werden, übertragen. Die Entstehung des elektrischen Zustandes ist nicht an den Vorgang der Reibung gebunden; ein Metallstück, das durch einen metallischen Draht mit einem der Pole einer Batterie in Verbindung steht, äußert, auch nach Entfernung des Drahtes, gleichfalls elektrische Wirkungen.

Ein elektrisches Metallstück mag sich im Luftraume befinden. Das elektrische Feld in seiner Umgebung untersucht man mit Hilfe eines Probekörpers, etwa eines mit Goldblatt überzogenen Holundermarkkügelchens, das seinerseits durch Berührung mit der geriebenen Siegellackstange oder mit dem Katzenfell elektrisch gemacht ist. Dieser Probekörper wird im elektrischen Felde von einer Kraft $\mathfrak{K}$ angegriffen. Wir denken uns diese Kraft $\mathfrak{K}$ gemessen; sie wird nach Betrag und Richtung für die verschiedenen Punkte des Feldes verschieden ausfallen; sie wird auch für

einen bestimmten Punkt des Feldes verschieden sein, je nach der Art, wie das Holundermarkkügelchen elektrisch gemacht ist. In der letzteren Hinsicht jedoch herrscht eine sehr einfache Gesetzmäßigkeit: war der Probekörper mit der Siegellackstange in Berührung, so sind Richtung und der Sinn der Kraft $\mathfrak{K}$, die er in einem gegebenen Punkte des Feldes erfährt, ganz bestimmte, und nur der Betrag hängt von der Art der Behandlung ab; war er mit dem Katzenfell in Berührung, so ist der Sinn der Kraft die entgegengesetzte, ihr Betrag hängt wieder von der Art der Behandlung ab. Wir werden so dazu geführt, die Kraft, welche im elektrischen Felde auf den Probekörper wirkt,

$$\mathfrak{K} = e \cdot \mathfrak{E} \tag{116}$$

zu setzen, wo der Skalar e von dem elektrischen Zustande des Probekörpers abhängt, während der Vektor $\mathfrak{E}$ von diesem Zustande unabhängig ist, aber für die verschiedenen Punkte des Feldes verschiedene Richtung und verschiedenen Betrag besitzt. In der Tat lehrt die Erfahrung, daß für zwei verschieden behandelte Probekörper, die nacheinander an denselben Punkt des Feldes gebracht werden, die Kräfte in einem bestimmten Verhältnis

$$\mathfrak{K}_1 : \mathfrak{K}_2 = e_1 : e_2 \tag{116a}$$

stehen, das für verschiedene Punkte des Feldes das gleiche ist. Die Erfahrung lehrt ferner, daß auf einen gegebenen Probekörper in zwei verschiedenen Punkten P und P' des elektrischen Feldes Kräfte $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{K}'$ wirken, deren Beträge in einem von der Behandlung des Probekörpers unabhängigen Verhältnis

$$|\mathfrak{K}| : |\mathfrak{K}'| = |\mathfrak{E}| : |\mathfrak{E}'| \tag{116b}$$

stehen. Die beiden Aussagen (116a, b) sind in (116) enthalten. Ist für den ersten Probekörper e_1 gegeben, so ist für jeden anderen e_2 durch (116a) bestimmt; alsdann ist $\mathfrak{E}$ für die einzelnen Punkte des Feldes mit Hilfe eines beliebigen Probekörpers zu ermitteln.

Den skalaren Faktor e im Ausdrucke (116) nennt man die „elektrische Ladung" des Probekörpers oder die Menge der auf ihm befindlichen „Elektrizität", den vektoriellen Faktor $\mathfrak{E}$ die „elektrische Feldstärke".

Durch die Gleichung (116) sind beide Größen, Elektrizitätsmenge und elektrische Feldstärke, eindeutig bestimmt, sobald die Einheit der Elektrizitätsmenge festgelegt ist. Dem entgegengesetzten Sinn der Kraft auf zwei mit der Siegellackstange bzw. mit dem Katzenfell berührte Probekörper trägt man dadurch Rechnung, daß man positive und negative Elektrizität unterscheidet. Man hat ganz willkürlich der Elektrizität des mit dem geriebenen Katzenfell berührten Kügelchens das positive Vorzeichen gegeben und infolgedessen der Elektrizität der geriebenen Siegellackstange das negative. Demgemäß hat man als Richtung der Feldstärke $\mathfrak{E}$ diejenige der Kraft bezeichnet, welche der mit dem Katzenfell berührte Probekörper erfährt.

Da der Vektor $\mathfrak{K}$ polar ist, so sind über die Natur des Skalars e und des Vektors $\mathfrak{E}$ nur zwei Annahmen möglich. Entweder e ist ein eigentlicher Skalar und $\mathfrak{E}$ ein polarer Vektor, oder e ist ein Pseudoskalar und $\mathfrak{E}$ ein axialer Vektor. Wir wollen uns jetzt schon für die erstere Annahme entscheiden, indem wir die elektrische Ladung als Skalar im eigentlichen Sinne betrachten. Zunächst ist diese Festsetzung allerdings durchaus willkürlich, sie findet ihre Rechtfertigung erst in einer ziemlich entfernten Folgerung (vgl. § 51 u. 59). Es würde sich indessen nicht empfehlen, in die Definition der Grundbegriffe eine Unbestimmtheit einzuführen, die später doch wieder zu beseitigen wäre.

Der Ausdruck (116) für die Kraft, die im elektrischen Felde auf einen geladenen Probekörper wirkt, ist nicht unbeschränkt gültig. Seine genaue Gültigkeit hört auf, wenn der Probekörper zu nahe an dem geladenen Körper sich befindet, und zwar um so eher, je größer die Ladung des Probekörpers ist. Er wird auch dann ungenau, wenn die Feldstärke zu stark mit dem Orte veränderlich ist, und zwar um so mehr, je größer die Abmessungen des Probekörpers sind (vgl. § 42). Wir werden später die Gründe dieser Abweichungen erkennen und in § 43 den Ausdruck für die Kraft entsprechend vervollständigen. Für das erste müssen wir uns daher eines hinreichend kleinen und hinreichend schwach geladenen Probekörpers bedienen, wenn wir auf Grund der Gleichung (116) das elektrische Feld ermitteln.

§ 27. Der elektrische Kraftfluß.

Wir werden in diesem Kapitel auch ferner von dem elektrischen Felde im Luftraume reden.

Mit Hilfe eines Probekörpers denke man sich in jedem Punkte des Raumes den Vektor $\mathfrak{E}$ und so das elektrische Feld ermittelt. Die hydrodynamische Abbildung, die im ersten Abschnitte (§ 10 ff.) behandelt wurde, vergleicht nun das elektrische Feld mit dem Felde einer Flüssigkeitsströmung; dabei ist dem Flüssigkeitsvolumen $\mathfrak{v}_n df$, welches in der Zeiteinheit durch das Flächenstück df in dem durch $\mathfrak{n}$ angezeigten Normalensinne strömt, der Ausdruck $\mathfrak{E}_n df$ an die Seite zu stellen. Man nennt ihn den „Kraftfluß", welcher das Flächenstück df durchsetzt. Die Abbildung des elektrischen Kraftfeldes auf das Strömungsfeld, welche dieser Bezeichnung zugrunde liegt, wird sich weiterhin als sehr fruchtbar erweisen.

Durch Zusammenfügung der Beiträge der einzelnen Flächenstücke erhält man den Kraftfluß durch eine beliebige Fläche f, insbesondere durch eine geschlossene Fläche. Die Strömung durch eine geschlossene Fläche haben wir mit der Ergiebigkeit der innerhalb der Fläche befindlichen Quellen in Verbindung gebracht. Dementsprechend (vgl. z. B. Gl. 74) setzen wir jetzt für eine beliebige geschlossene Fläche im elektrischen Felde

$$\int df \mathfrak{E}_n = 4\pi e, \tag{117}$$

indem wir unter e die gesamte Ergiebigkeit der im Innern von f befindlichen Quellen des Kraftflusses verstehen.

Es lehrt nun die Erfahrung, daß ein Kraftfluß im Luftraume nur dort entquillt oder mündet, wo sich elektrische Ladungen befinden: Die Elektrizität ist die Quelle des Kraftflusses. Dieser Satz führt uns dazu, den positiven oder negativen Skalar e in (117) als Maß der Elektrizitätsmenge zu verwenden. Den Faktor 4π haben wir hinzugefügt, um zur Übereinstimmung mit dem sogenannten „absoluten elektrostatischen Maßsysteme" zu gelangen.

Die Gleichung (117), welche die Elektrizitätsmenge mit dem elektrischen Kraftfluß verknüpft, ist eine der wichtigsten Grundgleichungen der Nahewirkungstheorie des elektrischen Feldes; die Gleichung besagt, daß die elektrische Ladung die Quellen des Kraftflusses bestimmt. Andererseits greift nach (116) die mechanische Kraft des elektrischen Feldes an den elektrischen Ladungen an. Die Gleichung (116) werden wir indessen nicht zu den Grundgleichungen der Theorie zählen dürfen, da ihr, wie schon erwähnt, nur eine angenäherte Gültigkeit zukommt. Der Umfang ihrer Gültigkeit wird, wenn wir die Grundlagen der Theorie entwickelt haben werden, aus diesen abzuleiten sein. Einstweilen haben wir sie lediglich zu dem Zwecke herangezogen, um eine anschauliche Vorstellung mit dem Begriffe des elektrischen Feldes zu verbinden.

Ist die Elektrizität räumlich verteilt, so wird ihre Dichte durch die auf die Volumeinheit bezogene Ergiebigkeit des Kraftflusses, d. h. durch die Divergenz (§ 12) von $\mathfrak{E}$, bestimmt

(117a) $$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho\,.$$

Bei flächenhafter Verteilung der Elektrizität ist die Flächendichte ω in ganz entsprechender Weise mit der Flächendivergenz (§ 17) von $\mathfrak{E}$ verknüpft

(117b) $$-(\mathfrak{E}_{n1} + \mathfrak{E}_{n2}) = 4\pi\omega\,.$$

Es ist sehr bemerkenswert, daß bei allen bekannten Arten der Elektrizitätserregung immer die gleiche Menge positiver wie negativer Elektrizität entsteht. Berücksichtigt man alle entstehenden Ladungen, so ist deren Gesamtmenge stets gleich Null, die gesamte Ergiebigkeit der Quellen des Kraftflusses ist gleich Null. Darin unterscheidet sich das elektrische Feld wesentlich von dem Schwerefelde. Im Schwerefeld sind indessen die Quellen des Kraftflusses durch Massen gegeben, welche weder neu geschaffen noch vernichtet werden können.

§ 28. Das elektrostatische Potential.

Das „elektrostatische Feld“ hat, wie sein Name besagt, die Eigenschaft, sich mit der Zeit nicht zu ändern. Es ist

allerdings durch diese Eigenschaft noch nicht vollständig gekennzeichnet. Es gibt nämlich elektrische Felder, bei denen die Elektrizität sich nicht im Gleichgewichte, sondern im Zustande stationärer Bewegung befindet. Diese elektrischen Felder sind gleichfalls zeitlich konstant; sie sind jedoch dadurch von den elektrostatischen Feldern unterschieden, daß sie von Wärmeentwicklung begleitet sind, und daß daher ihre Aufrechterhaltung dauernde Energiezufuhr erfordert. Das elektrostatische Feld hingegen bleibt ohne Energiezufuhr bestehen.

Andererseits ist es nicht möglich, aus dem elektrostatischen Felde durch einen Kreisprozeß, etwa indem man einen geladenen Probekörper in einem geschlossenen Wege herumführt, Arbeit zu gewinnen. Hat der Probekörper die in § 26 angenommenen Eigenschaften, so folgt aus Gleichung (116): im elektrostatischen Felde ist das Linienintegral von $\mathfrak{E}$ für einen jeden geschlossenen Weg gleich Null; das elektrostatische Feld ist demnach wirbelfrei:

$$\text{curl}\ \mathfrak{E} = 0. \tag{118}$$

Es ist folglich die Feldstärke im elektrostatischen Felde als negativer Gradient aus einem skalaren, eindeutigen Potentiale φ abzuleiten

$$\mathfrak{E} = -\nabla\varphi; \tag{118a}$$

man nennt es das „elektrostatische Potential". Seine Abnahme von einem Punkte (1) bis zu einem Punkte (2) ist gleich dem Linienintegrale von $\mathfrak{E}$, berechnet für einen beliebigen, von (1) nach (2) führenden Weg $\mathfrak{s}$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathfrak{E}\,d\mathfrak{s}. \tag{118b}$$

Das elektrostatische Feld entspricht demnach durchaus dem Felde einer wirbelfreien Flüssigkeitsströmung, welches im ersten Abschnitt behandelt worden ist. Der Ergiebigkeit e der Quellen entspricht hier, gemäß Gleichung (117), die Elektrizitätsmenge, die wir ebenso bezeichnet haben.

Ist die Elektrizitätsverteilung gegeben, so berechnet sich das elektrostatische Potential und damit das wirbelfreie Feld $\mathfrak{E}$ nach

den Lehren der §§ 14—18. Für eine Anzahl h von elektrischen Punkten wird das Potential (Gl. 75)

$$\varphi = \sum_{i=1}^{h} \frac{e_i}{r_i}; \tag{119}$$

für räumlich verteilte Ladungen (Gl. 83) ist

$$\varphi = \int \frac{dv\,\varrho}{r}, \tag{119a}$$

und für flächenhaft verteilte (Gl. 87a)

$$\varphi = \int \frac{df\,\omega}{r}, \tag{119b}$$

während das Feld von Doppelschichten sich nach den Angaben des § 18 berechnen würde.

Die Kraft, welche ein elektrischer Punkt von der Ladung e_1 auf einen zweiten von der Ladung e_2 ausübt, läßt sich aus (118a), (119), in Verbindung mit (116), ermitteln. Sie wirkt in Richtung der Verbindungslinie der beiden Punkte und hat den Wert

$$\mathfrak{K}_{12} = \mathfrak{r}_{12} \frac{e_1 e_2}{r_{12}^3}. \tag{119c}$$

Für die Wechselwirkung zweier geladenen Körper, insofern als dieselben wie Punktladungen aufgefaßt werden können, erhalten wir damit das Coulombsche Gesetz. Die Fernwirkungstheorie stellt dieses Gesetz an die Spitze, während wir, dem Gedankengange der Nahewirkungstheorie folgend, die Beziehungen (117), (118) als Grundlage gewählt haben, welche besagen, daß die Elektrizität Quelle des Kraftflusses, und daß das elektrostatische Feld wirbelfrei ist. Außerdem haben wir jedoch die Gleichung (116) verwandt, die, wie erwähnt wurde, nur unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen zutrifft. Auch dem Coulombschen Gesetze, auf das weiter unten (§ 42) zurückzukommen sein wird, kommt daher nur eine beschränkte Gültigkeit zu.

§ 29. Die Verteilung der Elektrizität auf Leitern.

Bei den Problemstellungen der Elektrostatik liegt die Sache meist nicht so einfach, daß die Verteilung der Elektrizität ge-

geben ist, und das Potential aus (119a, b) zu ermitteln ist. Die Verteilung der Elektrizität auf Metallkörpern ist selber durch Bedingungen bestimmt, zu deren Aufstellung wir uns jetzt wenden. Wir erwähnten bereits in § 26 die Eigenschaft eines Metalldrahtes, Elektrizität von dem Pole einer Batterie einem Körper zuzuführen. Man nennt Körper, denen diese Eigenschaft zukommt, „Leiter der Elektrizität“, solche, denen sie fehlt, „Isolatoren“. Diese Körperklassen sind nicht immer strenge zu sondern. So gibt es Körper, z. B. der Nernstsche Glühkörper, die bei gewöhnlicher Temperatur Isolatoren, bei Erwärmung Leiter werden. Bei Luft und anderen Gasen hängt es vom Luftdruck und von dem Betrage der Feldstärke ab, ob sie sich wie Leiter oder wie Isolatoren verhalten. Es steht aber fest, daß die Metalle unter allen Umständen Leiter der Elektrizität sind. Im Innern eines Metallstückes ruft demnach ein elektrisches Feld stets einen elektrischen Strom hervor.

Hieraus ergibt sich ohne weiteres eine Bedingung für das elektrostatische Gleichgewicht im Innern des Metalles; es muß, wenn anders eine Bewegung der Elektrizität nicht hervorgerufen werden soll, der Vektor $\mathfrak{E}$ in dem vom metallischen Leiter erfüllten Raume verschwinden. Berücksichtigt man die bereits früher angeführte Eigenschaft der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$, sich im Luftraume aus einem einwertigen Potentiale φ abzuleiten, so kann man jene Gleichgewichtsbedingung auch folgendermaßen ausdrücken: Das elektrostatische Potential φ ist im Innern eines Leiters konstant.

Ob wirklich im Innern eines Metallstückes kein elektrostatisches Feld besteht, kann man nicht direkt prüfen, da man den Probekörper, der zur Untersuchung des Feldes dient, nicht in das Innere des Leiters bringen kann. Man kann indessen einen Hohlraum herstellen, der rings von metallischen Wänden umschlossen ist. Sind innerhalb des Hohlraumes keine elektrischen Ladungen, so ist erfahrungsgemäß hier das Feld in der Tat Null, die metallische Umhüllung schirmt das Innere gegen das elektrostatische Feld außerhalb befindlicher Ladungen. Füllt man nun den Hohlraum mit dem leitenden Stoffe, so wird

dadurch ein elektrisches Feld nicht entstehen. In das Innere des Metalles dringt mithin das elektrostatische Feld nicht ein.

Anders liegt die Sache, wenn man in das Innere des von Leitern umschlossenen Hohlraumes elektrische Ladungen bringt. Hier muß, nach Gleichung (117), der gesamte Kraftfluß durch eine den Leiter umschließende Fläche hindurch proportional der im Innern des Metalles und an seiner Oberfläche angesammelten Elektrizitätsmenge sein. In dem von dem leitenden Stoffe eingenommenen Raume aber darf ein Feld nicht auftreten. War nun vor der Einführung der Elektrizität in ihr Inneres die metallische Wand unelektrisch, so muß sie jetzt elektrisch werden, da ja von ihr ein Kraftfluß ausgeht. Das wird sie in der Tat, und zwar erhält die Außenwand Ladung von dem Betrage und Vorzeichen der in den Hohlraum eingeführten Elektrizität, die Innenwand Ladung von gleichem Betrage und von entgegengesetztem Vorzeichen, so daß im ganzen von dem Systeme derjenige Kraftfluß ausgeht, welcher der hineingebrachten Ladung entspricht. Das Verhalten der Metalle ist auch hier durchaus in Übereinstimmung mit der Annahme, daß die Elektrizität in ihrem Inneren frei beweglich ist, und daß im Falle des elektrischen Gleichgewichtes innerhalb des Metalles kein Feld besteht.

Betrachten wir nun das gesamte, den Raum erfüllende Feld sowohl außerhalb wie innerhalb der Metalle, so ist dasselbe überall wirbelfrei. Wir nehmen an, daß die Luft von Ladungen frei, mithin hier

$$4\pi\varrho = \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$$

sei; im Innern des vom Metalle eingenommenen Raumes befindet sich selbstverständlich keine Ladung, weil hier kein Feld besteht. Wohl aber ist an der Oberfläche des Metalles eine Flächendivergenz von $\mathfrak{E}$ vorhanden, da von ihr ein Kraftfluß nach außen geht; dieser beträgt $\mathfrak{E}_n$, wenn n die nach dem Luftraum weisende Normale ist.

Die Flächendichte der Elektrizität ω, multipliziert mit 4π, ist nun gleich dem von der Flächeneinheit ausgehenden Kraftfluß; es ist demnach

$$4\pi\omega = \mathfrak{E}_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}. \tag{120}$$

Noch wäre es möglich, daß außer den flächenhaft verteilten Quellen des Kraftflusses Doppelquellen an der Grenzfläche von Luft gegen Metall ihren Sitz hätten. In der Tat, eine homogene Doppelschicht auf dieser geschlossenen Fläche würde nach § 18 weder innen noch außen das Feld ändern. Darin liegt eine Schwierigkeit, ihr Vorhandensein experimentell festzustellen. Wir wollen daher zunächst solche Doppelschichten nicht in Betracht ziehen. Wir kommen später in § 50 auf die Frage nach dem Bestehen solcher Doppelschichten zurück.

Kennt man das wirbelfreie Feld des Vektors $\mathfrak{E}$, so kann man die Verteilung der Elektrizität nach (120) berechnen. Wäre anderseits die Verteilung der Elektrizität auf den Oberflächen der Leiter bekannt, so könnte man das Feld aus (119b), (118a) berechnen. Weder die eine noch die andere Problemstellung liegt indessen in Wirklichkeit vor. Das Grundproblem der Elektrostatik ist vielmehr das folgende: In dem von Ladungen freien Luftraume gilt für das elektrostatische Potential die Laplacesche Gleichung

$$\text{(121)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{E} = -\operatorname{div} \nabla \varphi = -\nabla^2 \varphi = 0\,.$$

Auf den Oberflächen f_i eines jeden der Leiter muß φ einen konstanten Wert

$$\text{(121a)} \qquad \varphi = \varphi_i = \text{constans}\,,$$

annehmen. Dieser Wert des Potentiales herrscht dann auch im Innern des Leiters, da ja hier der Gradient des Potentiales verschwinden soll. Nicht diese Werte aber sind im allgemeinen gegeben, sondern die Gesamtladung eines jeden der Leiter

$$\text{(121b)} \qquad e_i = \int df_i \omega_i = -\frac{1}{4\pi} \int df_i \frac{\partial \varphi}{\partial n_i}\,.$$

Gesucht ist die entsprechende Lösung der Laplaceschen Gleichung; ist diese bis auf eine additive Konstante bekannt, so ist das elektrische Feld durch den Gradienten von φ eindeutig bestimmt. Das so bestimmte Feld ist das elektrostatische, die entsprechende Elektrizitätsverteilung tritt, im Falle des Gleichgewichtes, wirklich ein.

§ 30. Die Kapazität des Kugelkondensators.

Das elektrostatische Problem ist nur in wenigen Fällen gelöst. Der einfachste Fall ist eine **geladene metallische Kugel**. Es sei e die Ladung derselben, a ihr Radius; aus Symmetriegründen liegt es nahe, eine gleichförmige Verteilung der Ladung anzunehmen, so daß

$$\omega = \frac{e}{4\pi a^2}$$

die Flächendichte der Elektrizität ist. Man erfüllt die Gleichungen (118) und (120), welche den Zusammenhang von Elektrizität und Kraftfluß ausdrücken — die erstere in Form einer Integralgleichung, die letztere in Form einer Differentialgleichung —, indem man den Kraftfluß $4\pi e$ durch alle zur Oberfläche des Leiters konzentrischen Kugeln treten läßt und demgemäß die radiale Feldstärke

$$\mathfrak{E}_r = \frac{e}{r^2}$$

setzt. Das Potential dieses wirbelfreien Feldes ist

$$\varphi = \frac{e}{r} + C;$$

es hat auf der Kugel den konstanten Wert

$$\varphi_a = \frac{e}{a} + C.$$

Wir müssen nun, um ein in der Natur mögliches elektrostatisches Feld zu erhalten, angeben, wo der Kraftfluß, welcher von der Kugel ausgeht, mündet. Wir wollen festsetzen, daß eine zweite konzentrische hohle Metallkugel vom inneren Radius b die erste einschließt und daß auf dieser die negative Elektrizität sich befindet; da die Ladung $-e$ gleichförmig über die Kugel verteilt ist, so beträgt die Flächendichte

$$\omega = -\frac{e}{4\pi b^2};$$

das Potential hat für $r = b$ den Wert

$$\varphi_b = \frac{e}{b} + C.$$

Diese Anordnung bezeichnet man als **Kugelkondensator**, und nennt „**Kapazität**" des Kondensators den Quotienten aus

der positiven Ladung e und der Potentialdifferenz $\varphi_a - \varphi_b$ des positiv geladenen und des negativ geladenen Leiters. Es ist

$$\varphi_a - \varphi_b = e\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = e\,\frac{b-a}{ab},$$

mithin die Kapazität

$$K = \frac{e}{\varphi_a - \varphi_b} = \frac{ab}{b-a}. \tag{122}$$

Durch Verkleinerung des Abstandes $(b-a)$ der beiden Kugeln kann man sehr große Kapazitäten erzielen.

Wenn man von der Kapazität einer einzelnen Kugel schlechtweg redet, so nimmt man an, daß die andere Kugel, welche die entgegengesetzte Ladung trägt, sich in sehr großer Entfernung befindet; die Kapazität der Kugel ist in diesem Falle gleich ihrem Radius a. Da die gesamte Elektrizitätsmenge eines Feldes stets gleich Null ist, so muß man in jedem Falle angeben, wo die entsprechende Ladung entgegengesetzten Vorzeichens ihren Sitz hat, d. h. wo der von der Kugel ausgehende Kraftfluß mündet. Bei Laboratoriumsversuchen mündet der Kraftfluß an den Wänden des Zimmers oder auf der Oberfläche etwa im Zimmer anwesender Leiter. Befinden sich diese in Entfernungen, die groß gegen den Radius der Kugel sind, so ist die Kapazität der Kugel praktisch gleich ihrem Radius.

§ 31. Das gestreckte Rotationsellipsoid.

Wir wollen jetzt ein leitendes, gestrecktes Rotationsellipsoid betrachten, das elektrisch geladen ist; welches ist sein Feld und welchen Wert hat seine Kapazität? Die Mündung des von der Leiteroberfläche ausgehenden Kraftflusses wird, wenn von der Kapazität des Ellipsoides schlechtweg die Rede ist, in sehr große Entfernung verlegt, etwa auf eine zum Ellipsoid konzentrische Kugelfläche. Die Aufgabe ist nun mathematisch folgendermaßen zu formulieren (vgl. § 29): Innerhalb des von den beiden Leitern begrenzten Raumes hat das Potential φ der Laplaceschen Gleichung

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{123}$$

zu genügen; auf den Oberflächen f_1, f_2 der Leiter nimmt es konstante Werte

$$\varphi = \varphi_1, \quad \varphi = \varphi_2 \tag{123a}$$

an; der Gradient von φ weist senkrecht zu diesen Flächen und ist nach (120) der Flächendichte ω proportional

$$4\pi\omega = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}.$$

Dabei ist ω noch bis zu einem gewissen Grade willkürlich, es ist nur die Gesamtladung

$$(123\,\text{b}) \quad e = \int df_1\,\omega = -\frac{1}{4\pi}\int df_1 \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} = +\frac{1}{4\pi}\int df_2 \frac{\partial\varphi}{\partial n_2}$$

vorgeschrieben.

Es kommt meist nicht so sehr auf die Ermittelung der Elektrizitätsverteilung als eben auf den Wert der Kapazität an; dieser ist bestimmt, wenn die Potentiale φ_1, φ_2 der beiden Leiter gefunden sind; es wird dann

$$(123\,\text{c}) \qquad K = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Da es allgemeine Methoden zur Lösung des Grundproblems der Elektrostatik für beliebige Leiterformen nicht gibt, so wollen wir die Kapazität des gestreckten Rotationsellipsoides auf einem eigentümlichen, nur für diese besondere Leiterform gangbaren Wege lösen. Wir denken uns in unserer hydrodynamischen Abbildung die Verbindungslinie der Brennpunkte des Ellipsoids gleichförmig mit Quellen besetzt. Wir zeigen, daß die Äquipotentialflächen des zugehörigen wirbelfreien Feldes konfokale Rotationsellipsoide sind, und daß das Feld auch die übrigen verlangten Eigenschaften besitzt.

Die Ergiebigkeit der ganzen Strecke, von der Länge $2c$, setzen wir gleich e. Ihr Potential

$$\varphi = \frac{e}{2c}\int_{-c}^{+c} \frac{d\zeta}{r},$$

wo r den Abstand eines Aufpunktes von den Punkten der mit Quellen belegten Linie angibt, stellt selbstverständlich eine Lösung der Laplaceschen Gleichung (123) dar. Die z-Achse in die Quellenlinie, den Koordinatenanfang in ihren Mittelpunkt legend, setzen wir

$$r = \sqrt{(z-\zeta)^2 + x^2 + y^2}$$

und erhalten

$$(124)\quad \varphi = -\frac{e}{2c}\Big\{ln(z-\zeta+r)\Big\}_{\zeta=-c}^{\zeta=+c} = \frac{e}{2c} ln\left(\frac{z+c+r_1}{z-c+r_2}\right),$$

wenn r_1, r_2 die Entfernungen des Aufpunktes von den durch

$$\zeta = -c, \quad \zeta = +c$$

gekennzeichneten Endpunkten der belegten Linie sind.

Um nun zu zeigen, daß φ auf konfokalen Rotationsellipsoiden konstant ist, gehen wir aus von der Gleichung dieser Flächenschar in der Parameterdarstellung

$$z = c\alpha\cos\beta, \quad \sqrt{x^2+y^2} = c\sqrt{\alpha^2-1}\,\sin\beta, \quad \begin{cases} 1 \leqq \alpha < \infty, \\ 0 \leqq \beta \leqq \pi. \end{cases}$$

Die Flächen $\alpha =$ constans sind gestreckte Rotationsellipsoide von den Halbachsen

$$a = c\alpha, \quad b = c\sqrt{\alpha^2-1};$$

für $a = 1$ erhält man die belegte Linie als Grenzfall eines sehr gestreckten Rotationsellipsoides. Die Flächen $\alpha =$ constans werden senkrecht geschnitten von den Flächen $\beta =$ constans; dieses sind nämlich konfokale Rotationshyperboloide mit den reellen Halbachsen $c\cos\beta$. Die Brennpunkte beider Flächenscharen sind die Endpunkte der belegten Linie. Mithin folgt aus bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte

$$r_1 + r_2 = 2c\alpha, \quad r_1 - r_2 = 2c\cos\beta,$$

und daher $\quad r_1 = c\alpha + c\cos\beta, \quad r_2 = c\alpha - c\cos\beta.$

Setzt man die für z, r_1, r_2 erhaltenen Werte in (124) ein, so erhält man

$$(124a)\quad \varphi = \frac{e}{2e} ln\left(\frac{\alpha\cos\beta + 1 + \alpha + \cos\beta}{\alpha\cos\beta - 1 + \alpha - \cos\beta}\right) = \frac{e}{2c} ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right).$$

Das Potential ist also in der Tat konstant auf den konfokalen Rotationsellipsoiden $\alpha =$ constans; es verschwindet auf einer in sehr großer Entfernung befindlichen Kugel. Denken wir uns irgendeines der gestreckten Ellipsoide der Schar als leitend, so genügt das Feld in dem von dieser Fläche einerseits, von der sehr entfernten Kugel anderseits begrenzten Raume allen Bedingungen des elektrostatischen Problemes. Das Feld ist hier wirbelfrei und quellenfrei, der gesamte, aus dem Ellipsoide heraus-

tretende Kraftfluß ist gleich der Ergiebigkeit e der belegten Linie, endlich sind die beiden das Feld begrenzenden Leiteroberflächen Äquipotentialflächen. Es sind demnach die Bedingungen (123), (123a), (123b) erfüllt. Vorausgesetzt, daß diese Bedingungen überhaupt das elektrostatische Feld eindeutig bestimmen — auf diese Frage kommen wir weiter unten in § 41 zurück —, ist φ das Potential des gesuchten Feldes.

Sind a, b, c jetzt große und kleine Halbachse und halber Brennpunktabstand des leitenden Ellipsoides, so ist, um dessen Potential φ_1 zu erhalten, in (124a)

$$\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \qquad \text{zu setzen. Es wird}$$

$$\text{(124b)} \quad \varphi_1 = \frac{e}{2c} \ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right) = \frac{e}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right);$$

da außerdem auf der sehr entfernten Kugel (für $\alpha = \infty$)

$$\varphi_2 = 0$$

ist, so wird die **Kapazität** K **des gestreckten Rotationsellipsoides** bestimmt durch

$$\text{(124c)} \qquad \frac{1}{K} = \frac{\varphi_1}{e} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right).$$

Für sehr gestreckte Ellipsoide, d. h. für sehr kleine Werte des Quotienten $b : a$, erhält man

$$\text{(124d)} \qquad \frac{1}{K} = \frac{1}{a} \cdot \ln\left(\frac{2a}{b}\right).$$

Die Kapazität eines solchen stabförmigen Leiters, der etwa durch einen Draht mit kreisförmigem, nach den Enden hin abnehmendem Querschnitt zu verwirklichen ist, ergibt sich um so kleiner, je geringer bei gegebener Länge seine Dicke ist. Die Elektrizitätsverteilung wird übrigens in diesem Grenzfalle durch die oben zur Ableitung des Potentiales benutzte gleichförmige Belegung der die Brennpunkte verbindenden Strecken dargestellt. Die Elektrizität verteilt sich demnach über den stabförmigen Leiter so, daß auf gleiche Längen des Drahtes gleiche Ladungen entfallen.

§ 32. Ein elektrischer Punkt gegenüber einer leitenden Ebene.

Wir denken uns das Feld auf der einen Seite durch eine unendliche Ebene begrenzt, welche die Oberfläche eines Leiters bildet. Im Abstande a von dieser Ebene, in einem Punkte A, denken wir uns einen kleinen, mit der Elektrizitätsmenge e geladenen Körper befindlich. Die Abmessungen des Körpers sollen so klein sein, daß sein elektrisches Feld bei Abwesenheit der leitenden Ebene aus dem Potentiale

$$\varphi = \frac{e}{r}$$

abzuleiten wäre. Es fragt sich nun, wie die leitende Begrenzungsebene das Feld beeinflußt. Jenes Potential genügt offenbar keineswegs der Bedingung, auf der leitenden Ebene konstant zu sein. Man kann indessen ein Feld erhalten, für welches jene Ebene Äquipotentialfläche ist, indem man dem Punkte A den spiegelbildlich ihm entsprechenden B zuordnet und sich in diesem Bildpunkte die entgegengesetzte Ladung $-e$ befindlich denkt. Ist r' der Abstand eines Aufpunktes vom Bildpunkte, so stellt

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'} \tag{125}$$

das Potential des Gesamtfeldes in dem betrachteten Halbraume dar. Dasselbe ist gleich Null auf der Begrenzungsebene, da hier $r = r'$ ist. Das wirbelfreie Feld ist auf derjenigen Seite der Ebene, in welcher der Punkt A liegt, quellenfrei, mit Ausnahme des Punktes A selbst; von diesem geht der Kraftfluß $4\pi e$ aus.

Auf der Begrenzungsebene beträgt die senkrecht zu ihr weisende elektrische Feldstärke

$$\mathfrak{E}_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -e\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + e\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} = -\frac{2ae}{r^3};$$

die ihr nach (120) proportionale Flächendichte ist

$$\omega = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_n = -\frac{e}{2\pi}\cdot\frac{a}{r^3}. \tag{125a}$$

Die Elektrizität verteilt sich mithin in der Weise auf der

ebenen Oberfläche des Leiters, daß die Flächendichte der dritten Potenz des Abstandes vom elektrischen Punkte umgekehrt proportional ist. Als gesamte Ladung der Ebene

$$\int \omega\, df = -\frac{e}{2\pi}\int \frac{a\, df}{r^3}$$

wird durch Einführung von Polarkoordinaten ϱ, ϑ erhalten

$$\int \omega\, df = -\frac{e}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} \frac{a\varrho\, d\varrho}{(a^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}} = +\, e\left\{\frac{a}{(a^2+\varrho^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}_{\varrho=0}^{\infty} = -\, e.$$

Es endigt mithin der ganze im Punkte A beginnende Kraftfluß auf der ebenen Oberfläche des Leiters.

Die Erscheinung, daß ein elektrisch geladener Körper auf der Oberfläche eines benachbarten ursprünglich ungeladenen Leiters Ladung entgegengesetzten Vorzeichens hervorruft, bezeichnet man als „elektrische Influenz". Diese Erscheinung ist als Folge des Umstandes aufzufassen, daß das Feld in das Innere des Leiters nicht eindringen kann. Ist der Leiter von endlicher Ausdehnung und ohne leitende Verbindung mit anderen Körpern, so muß, da seine Ladung im ganzen gleich Null bleibt, der Kraftfluß, welcher auf der dem influenzierenden Punkte gegenüberliegenden Seite endigt, auf der anderen Seite wiederum den Leiter verlassen. In dem oben behandelten Falle eines unendlich ausgedehnten, das Feld nach der einen Seite hin abschließenden Leiters indessen ist die Ladung $+\, e$, die gleichzeitig mit der influenzierten Ladung $-\, e$ bei Annäherung des influenzierenden Punktes entstand, fortgeschafft zu denken.

Die Lösung des Influenzproblemes mit Hilfe elektrischer Bilder ist von W. Thomson auf kugelförmige Leiter ausgedehnt worden.

Wird in die Nähe eines geladenen Leiters ein elektrischer Punkt gebracht, etwa als Probekörper zur Untersuchung des Feldes, so überlagert sich sein durch Anwesenheit des Leiters beeinflußtes Feld dem ursprünglichen Felde des Leiters. Daher wird die Kraft, die der Probekörper erfährt, nicht der ursprünglichen, sondern der durch seine Anwesenheit veränderten Elek-

trizitätsverteilung über den Leiter hin entsprechen, die Kraft wird hier ein genaues Maß für die ursprünglich herrschende Feldstärke nicht ergeben, um so weniger, je größer die Ladung des Probekörpers ist und je mehr er sich der Oberfläche des Leiters nähert. In unmittelbarer Nähe der Leiteroberfläche ist die im § 26 gegebene Ermittelung des Vektors $\mathfrak{E}$ durch den Probekörper nur dann richtig, wenn man die Ladung desselben beliebig klein machen kann. Streng genommen bestimmt erst der bei fortgesetzter Verkleinerung der Ladung e des Probekörpers erreichte Grenzwert

$$\lim_{e=0}\left(\frac{\mathfrak{K}}{e}\right) \qquad \text{den Vektor } \mathfrak{E}.$$

Zweites Kapitel.

Dielektrika.

§ 33. Dielektrizitätskonstante und elektrische Verschiebung.

Wir haben uns bisher auf das elektrische Feld im Luftraume beschränkt. Wir gehen jetzt dazu über, andere Isolatoren in Betracht zu ziehen. Faraday hat gefunden, daß die Kapazität eines Kugelkondensators (§ 30) sich ändert, wenn der Raum zwischen den Kugeln mit anderen isolierenden Stoffen, etwa Wachs oder Schwefel, ausgefüllt wird; die Ladung der Kugeln bei konstant gehaltener Potentialdifferenz wächst dann in einem bestimmten, nur von der betreffenden isolierenden Substanz abhängigen Verhältnis; die Kapazität des Kondensators wird jetzt nicht mehr durch die Formel (122), sondern durch die allgemeinere Formel

$$K = \frac{e}{\varphi_a - \varphi_b} = \varepsilon \cdot \frac{ab}{a-b} \tag{126}$$

gegeben. Die Konstante ε, welche das dielektrische Verhalten eines Isolators anzeigt, wird die „Dielektrizitätskonstante" genannt. Sie ist definiert als Quotient aus der Kapazität eines mit dem betreffenden homogenen Dielektrikum gefüllten Kugelkondensators und der Kapazität eines geometrisch gleichen Luftkondensators. Es ist z. B. die Dielektrizitätskonstante von Paraffin 2,3, von Gläsern 6 bis 8, von destilliertem Wasser 76.

Die Dielektrizitätskonstante der Gase, insbesondere der atmosphärischen Luft, hängt wesentlich von der Dichte ab, und zwar in der Weise, daß für alle Gase die Werte von ε mit abnehmender Dichte sich einem und demselben Grenzwerte nähern. Diesen Grenzwert bezeichnet man als Dielektrizitätskonstante des leeren Raumes oder des „Äthers“. Die Tatsache, daß bei starker Verdünnung des in einem Raume enthaltenen Stoffes die Gesetze des elektrischen Feldes von der chemischen Natur des Stoffes unabhängig werden, ist für die Entwicklung der Elektrizitätslehre überaus wichtig geworden. Sie legt die Annahme nahe, daß auch der leere Raum elektrische Wirkungen vermittelt, daß er der Sitz eines elektrischen Feldes sein kann. Da man früher dem Raum nur geometrische Eigenschaften beizulegen pflegte, so hat man für den mit elektromagnetischen Eigenschaften behafteten Raum ein besonderes Wort „Äther“ eingeführt. Es ist gut, sich zu vergegenwärtigen, daß sowohl der Begriff des geometrischen Raumes wie auch der Begriff des elektromagnetischen Äthers nur Abstraktionen sind. Die Eigenschaften des Raumes, welche die Geometrie behandelt, und diejenigen, welche uns durch das Studium der elektromagnetischen Vorgänge bekannt geworden sind, sind zwar rein begrifflich zu scheiden, in Wirklichkeit aber sind sie unzertrennlich; geometrische und elektromagnetische Eigenschaften zusammen kennzeichnen erst den wirklichen Raum. Wir verbinden heute mit dem Worte „Äther“ keineswegs die Vorstellung einer hypothetischen Substanz; vielmehr gebrauchen wir dieses historisch überlieferte Wort heute als Abkürzung, wenn wir ohne Weitschweifigkeiten von dem Raume als Träger eines elektromagnetischen Feldes sprechen.

Wir haben uns bisher der Luft bei Atmosphärendruck als Normalsubstanz bedient und auf diese die Dielektrizitätskonstanten der Körper bezogen. Bei theoretischen Untersuchungen wird man besser die Dielektrizitätskonstanten der Körper auf den Äther beziehen; die Zahlenwerte von ε werden dann alle größer als 1, insbesondere wird für Luft unter Atmosphärendruck ε gleich 1,000590. Praktisch ist demnach der Unterschied der dielektri-

schen Konstanten von Luft bei Atmosphärendruck und bei großer Verdünnung meist zu vernachlässigen. Immerhin wollen wir von jetzt an die Festsetzung treffen, daß die Entwickelungen des vorigen Kapitels sich streng genommen auf den Luftraum bei unendlicher Verdünnung der Luft, d. h. auf den Äther beziehen. Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Grundgesetze der Elektrostatik so zu verallgemeinern, daß sie beliebige isotrope Dielektrika umfassen.

Für ein homogenes, flüssiges oder gasförmiges Dielektrikum geschieht gleichfalls die Ermittelung des Vektors $\mathfrak{E}$ mit Hilfe des geladenen Probekörpers (vgl. § 26). Auch hier ergibt die Erfahrung, daß das Feld von $\mathfrak{E}$ überall wirbelfrei ist (118); dasselbe leitet sich also aus einem Potential φ ab. Um nun die nach Gleichung (126) geänderte Kapazität eines Luftkondensators zu erklären, muß man die durch (117) ausgedrückte Beziehung zwischen der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ und der elektrischen Ladung e aufgeben.

Wir führen mit Maxwell einen neuen Vektor $\mathfrak{D}$ ein, welcher den Vektor $\mathfrak{E}$ in der Gleichung (117) ersetzt, und welcher „elektrische Verschiebung genannt wird. Er soll folgender Festsetzung genügen

$$\int df\, \mathfrak{D}_n = 4\pi e. \tag{127}$$

D. h. das über eine geschlossene Fläche f erstreckte Integral der Normalkomponente des Vektors $\mathfrak{D}$ oder die gesamte elektrische Verschiebung durch die Fläche ist gleich der gesamten, von der Fläche umschlossenen elektrischen Ladung, multipliziert mit 4π. Maxwell definiert übrigens den Vektor $\mathfrak{D}$ der elektrischen Verschiebung (englisch „displacement“) so, daß in (127) der Faktor 4π fortfällt; aus Gründen, die später hervortreten werden, ist in diesem Buche seit der vorigen Auflage die Maxwellsche Definition des Vektors $\mathfrak{D}$ geändert worden. Maxwells Bezeichnung „elektrische Verschiebung“ liegt übrigens ein von der hydrodynamischen Abbildung etwas abweichendes mechanisches Bild zugrunde, indem sie das Feld des Vektors $\mathfrak{D}$ nicht durch die in der Zeiteinheit stattfindende Strömung eines Fluidums abbildet, sondern durch

die gesamte Verschiebung, welche die Teilchen des Fluidums von der Gleichgewichtslage aus erfahren haben. Vom Standpunkte der Geometrie der Vektorfelder aus sind indessen die beiden Bilder nicht wesentlich voneinander verschieden. Neuerdings wird $\mathfrak{D}$ von manchen Autoren als „elektrische Erregung“ bezeichnet.

Die Elektrizität ist, je nach dem Vorzeichen, Quelle oder Senke der elektrischen Verschiebung. In dem von Elektrizität freien Gebiete des Isolators ist das Feld des Vektors $\mathfrak{D}$ quellenfrei; dagegen gelten, wenn es sich um räumlich oder flächenhaft verteilte Ladungen handelt, die Beziehungen

$$\text{div}\, \mathfrak{D} = 4\pi\varrho, \tag{127a}$$

$$-\{\mathfrak{D}_{n1} + \mathfrak{D}_{n2}\} = 4\pi\omega, \tag{127b}$$

welche an die Stelle von (117a, b) treten.

Da nun nach diesen Festsetzungen für den Kugelkondensator von gegebener Ladung die gesamte Verschiebung durch konzentrische Kugeln dieselbe ist wie früher, und da der Zusammenhang von $\mathfrak{E}$ und φ der alte geblieben ist, so ist, um die durch (126) ausgedrückte Änderung der Kapazität zu erhalten, der Vektor $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{E}$ folgendermaßen zu verknüpfen

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \cdot \mathfrak{E}. \tag{128}$$

In der Tat wird dann der Quotient von Ladung, d. h. Flächenintegral von $\mathfrak{D}$, zur Potentialdifferenz der Kugeln, d. h. dem Linienintegral von $\mathfrak{E}$, im Verhältnis $\varepsilon : 1$ vergrößert, wenn der vorher leere Raum des Kugelkondensators mit dem betreffenden Isolator gefüllt wird.

Überhaupt kann man das elektrostatische Problem für den Fall, daß das Feld von einem homogenen Isolator gefüllt ist, allgemein auf den Fall zurückzuführen, wo die geladenen Leiter sich im leeren Raume befinden. Werden die Ladungen der Leiter konstant gehalten, so wird das Feld des Vektors $\mathfrak{D}$ durch Füllung des Raumes mit dem Dielektrikum nicht geändert, aber $\mathfrak{E}$ und φ werden im Verhältnis $1 : \varepsilon$ verkleinert. Werden aber die Potentiale der Leiter konstant gehalten, so bleibt das Feld des Vektors $\mathfrak{E}$ ungeändert, mithin wird $\mathfrak{D}$ und die elektrische Ladung

im Verhältnis $\varepsilon : 1$ vergrößert. Es folgt z. B., daß die Kapazität eines einzelnen Leiters, im Verhältnis $\varepsilon : 1$ vermehrt wird, wenn der Leiter aus dem leeren Raum in ein Dielektrikum gebracht wird, freilich streng genommen nur dann, wenn dasselbe den ganzen Raum außerhalb des Leiters erfüllt. Wenn die Dielektrika nicht homogen sind, oder wenn Trennungsflächen zweier Isolatoren im Felde verlaufen, sind besondere Betrachtungen notwendig.

Für ein festes Dielektrikum ist es nicht ohne weiteres möglich, den Vektor $\mathfrak{E}$ mit Hilfe des Probekörpers zu bestimmen und so die wirbelfreie Verteilung des Feldes festzustellen. Hier sind die soeben aufgestellten Gesetze des Feldes zunächst rein hypothetisch einzuführen; die Rechtfertigung ist in der Richtigkeit der weiterhin zu entwickelnden Folgerungen zu sehen, die sich auf das Feld außerhalb der festen Dielektrika oder auf die Kapazität der Leiter beziehen.

§ 34. Wahre und freie Elektrizität.

In einem elektrostatischen Felde, welches von dielektrischen Körpern erfüllt ist, haben wir jetzt zwei Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ zu unterscheiden, die in isotropen Körpern durch (128) verknüpft sind. Die Quellen der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ sind nach (127a, b) die Ladungen wahrer Elektrizität:

Die räumliche Dichte der wahren Elektrizität ist gleich der Divergenz, ihre Flächendichte gleich der Flächendivergenz von $\mathfrak{D}$, dividiert durch 4π.

Neben der „wahren Elektrizität“ führen wir jetzt die „freie Elektrizität“ durch folgende Festsetzungen ein: Die räumliche Dichte ϱ' der freien Elektrizität und die Flächendichte ω' derselben sind gleich der räumlichen Divergenz bzw. der Flächendivergenz des Vektors $\mathfrak{E}$, dividiert durch 4π

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho', \tag{129}$$

$$-(\mathfrak{E}_{n1} + \mathfrak{E}_{n2}) = 4\pi\omega'. \tag{129a}$$

Die auf einem isolierten Leiter befindliche Menge wahrer Elektrizität wird durch Einführung in einen anderen Isolator

nicht geändert. Der vom Leiter ausgehende Kraftfluß aber, und daher die Menge der freien Elektrizität auf dem Leiter, wird dadurch geändert.

Wir betrachten das Feld, das eine Anzahl geladener Leiter umgibt. Die Flächendichte der wahren Elektrizität, die an der Oberfläche der Leiter ihren Sitz hat, ist, wenn n die äußere Normale dieser Fläche bezeichnet, nach (127b)

$$4\pi\omega = \mathfrak{D}_n . \tag{129b}$$

Wir nehmen an, daß weder im Innern der im Felde befindlichen Dielektrika noch an der Trennungsfläche je zweier derselben wahre Elektrizität sich befindet, dann gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0, \tag{129c}$$

$$\mathfrak{D}_{n1} + \mathfrak{D}_{n2} = 0 . \tag{129d}$$

Die Normalkomponente von $\mathfrak{D}$ durchsetzt demnach stetig die Trennungsfläche zweier Dielektrika.

Die räumliche Dichte ϱ' der freien Elektrizität ist nach (128) und (129c) im Innern homogener Isolatoren ebenfalls gleich Null, sie ist aber von Null verschieden, wenn der Isolator inhomogen, d. h. wenn ε in demselben nicht konstant ist. Insbesondere in einer Übergangsschicht zweier Dielektrika ist freie Elektrizität anzunehmen; im Grenzfalle unstetigen Überganges bildet sie eine Flächenbelegung von der durch (129a) bestimmten Flächendichte ω'.

Die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ ist im elektrostatischen Felde überall wirbelfrei verteilt und daher als negativer Gradient eines Potentiales darzustellen

$$\mathfrak{E} = -\nabla\varphi, \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = 0 . \tag{130}$$

Auch an der Trennungsfläche verschiedener Stoffe treten keine Flächenwirbel (§ 22) des Vektors $\mathfrak{E}$ auf, d. h. die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ durchsetzen stetig die Trennungsfläche zweier Körper.

Im Innern homogener Isolatoren ist nach (128) und (130) auch der Wirbel des Vektors $\mathfrak{D}$ Null, aber im Innern inhomogener Isolatoren sowie insbesondere auf der Trennungsfläche

verschiedener Isolatoren können Wirbel von $\mathfrak{D}$ ihren Sitz haben; das Feld des Vektors $\mathfrak{D}$ ist somit nicht durchweg wirbelfrei und daher nicht allgemein aus einem skalaren Potential abzuleiten.

Will man das Potential φ berechnen, so muß man natürlich die Quellen des wirbelfreien Vektorfeldes

$$\mathfrak{E} = -\nabla\varphi$$

in Betracht ziehen, d. h. die freie Elektrizität.

Es ist

$$\varphi = \int \frac{dv\varrho'}{r} + \int \frac{df\omega'}{r}, \tag{130a}$$

wo ϱ', die räumliche Dichte der freien Elektrizität, in denjenigen Volumelementen von Null verschieden ist, wo ε mit dem Orte variiert, und ω', die Flächendichte der freien Elektrizität, nicht nur an der Oberfläche der Leiter, sondern auch an der Trennungsfläche je zweier Isolatoren ihren Sitz hat.

§ 35. Die elektrischen Kraftlinien.

Bei elementaren Darstellungen der Elektrizitätslehre pflegt man vielfach das elektrische Feld durch Zeichnung der „Kraftlinien" zu veranschaulichen. Es sind dies Kurven, deren Tangente in jedem Punkt des Feldes die Richtung des Vektors $\mathfrak{E}$ anzeigt. Man zeichnet die Kraftlinien gewöhnlich so, daß die Zahl der Kraftlinien, die eine gegebene Fläche durchsetzen, ein Maß für den durch die Fläche hindurchtretenden Kraftfluß ist. Es beginnen dann die Kraftlinien dort, wo freie Elektrizität positiven Vorzeichens, sie endigen dort, wo solche negativen Vorzeichens ihren Sitz hat.

Ebenso kann man das Feld des Vektors $\mathfrak{D}$ durch „Verschiebungslinien" darstellen, deren Tangente in die Richtung von $\mathfrak{D}$ fällt, während ihre Zahl ein Maß des Betrages von $\mathfrak{D}$ ist. Der Ursprung und die Mündung der Verschiebungslinien wird dann mit dem Sitz der wahren Elektrizität zusammenfallen. Begnügt man sich jedoch mit der Darstellung der Richtung der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, welche in isotropen Körpern miteinander übereinstimmt, so kann man in solchen Körpern die Verschiebungslinien mit den Kraftlinien zusammenfallen lassen.

Aus der Stetigkeit der normalen Komponenten von $\mathfrak{D}$ und der tangentialen Komponenten von $\mathfrak{E}$ (§ 34) folgt das Brechungsgesetz der Kraftlinien an der Grenze zweier homogener Isolatoren. Die Kraftlinien, die vom Dielektrikum (1) nach (2) gehen mögen, zeigen die Richtung beider Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ an. Es seien α_1, α_2 die Winkel, welche die Richtungen der beiden Vektoren zu beiden Seiten der Trennungsfläche mit dem von (1) nach (2) gehenden Lote einschließen. Dann ist

$$|\mathfrak{D}_1| \cos \alpha_1 = |\mathfrak{D}_2| \cos \alpha_2 , \quad |\mathfrak{E}_1| \sin \alpha_1 = |\mathfrak{E}_2| \sin \alpha_2 ;$$

daher, mit Rücksicht auf (128)

$$\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2 . \tag{131}$$

Die trigonometrischen Tangenten der Kraftlinienrichtungen gegen das Lot der Trennungsfläche verhalten sich wie die Dielektrizitätskonstanten der beiden aneinander grenzenden Isolatoren. Die Kraftlinien werden also beim Eintritt in einen Isolator mit größerer Dielektrizitätskonstante vom Lote fortgebrochen.

§ 36. Kugelkondensator mit zwei dielektrischen Schichten.

Treffen die Kraftlinien senkrecht auf die Trennungsfläche zweier Isolatoren, so ändert sich ihre Richtung nicht; es entsteht aber eine Flächenbelegung freier Elektrizität. Als Beispiel mag wieder der Kugelkondensator (§ 30) dienen. An die innere Kugel vom Radius a mag sich zunächst eine dielektrische Kugelschicht von der Dielektrizitätskonstante ε_1 anschließen, die nach außen durch eine konzentrische Kugel vom Radius c begrenzt wird; der Raum zwischen dieser Kugel und der leitenden Kugel vom Radius b sei von einem zweiten Isolator von der Dielektrizitätskonstante ε_2 erfüllt.

Wahre Elektrizität sitzt nur auf der Oberfläche der beiden Metallkugeln, und zwar positive $+e$ auf der inneren, negative $-e$ auf der äußeren. Die gesamte elektrische Verschiebung durch die konzentrischen Kugeln ist gleich e. Die Vektoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ sind radial gerichtet, es ist daher im ersten Isolator

$$\mathfrak{D}_r = \frac{e}{r^2}, \qquad \mathfrak{E}_r = \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{e}{r^2},$$

im zweiten Isolator

$$\mathfrak{D}_r = \frac{e}{r^2}, \qquad \mathfrak{E}_r = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{e}{r^2}.$$

Die Grenzbedingungen, welche stetigen Übergang der Normalkomponenten von $\mathfrak{D}$ und der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ verlangen, sind hierdurch erfüllt.

Es ist die Flächendichte der wahren Elektrizität an der inneren Metallkugel

$$\omega = \frac{e}{4\pi a^2},$$

an der äußeren Metallkugel

$$\omega = -\frac{e}{4\pi b^2}.$$

Hingegen die Flächendichte der freien Elektrizität an der inneren Metallkugel ist

$$\omega' = \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{e}{4\pi a^2},$$

an der Trennungsfläche der beiden Isolatoren

$$\omega' = \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\frac{e}{4\pi c^2},$$

an der äußeren Metallkugel

$$\omega' = -\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{e}{4\pi b^2}.$$

Die Gesamtmengen freier Elektrizität sind auf der inneren Metallkugel

$$e' = \omega' 4\pi a^2 = \frac{e}{\varepsilon_1},$$

auf der Trennungsfläche der beiden Isolatoren

$$e' = \omega' 4\pi c^2 = e\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right),$$

auf der äußeren Metallkugel

$$e' = \omega' 4\pi b^2 = -\frac{e}{\varepsilon_2}.$$

Die algebraische Summe der freien Elektrizitäten, die auf den beiden Metallkugeln und auf der Trennungsfläche der beiden Isolatoren sich befinden, ist gleich Null.

Die Potentialdifferenz der beiden leitenden Kugeln ist

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^c \mathfrak{E}_r dr + \int_c^b \mathfrak{E}_r dr = \frac{e}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \frac{e}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right).$$

Daher ist die Kapazität K des Systemes bestimmt durch

$$\frac{1}{K} = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{e} = \frac{1}{\varepsilon_1 a} - \frac{1}{\varepsilon_2 b} + \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right). \tag{132}$$

Sind die Radien b, c groß gegen a, so kann man $K = \varepsilon_1 a$ setzen, d. h. die Kapazität eines Systemes ist dann gleich der Kapazität einer Kugel, die sich allein in einem ganz von dem ersten Isolator erfüllten Raume befindet. Die erhaltene Gleichung lehrt, wie groß die Dicke der dielektrischen, der Kugel anliegenden Schicht sein muß, damit praktisch das zweite Dielektrikum die Kapazität nicht mehr beeinflußt.

§ 37. Ein elektrischer Punkt gegenüber einem dielektrischen Halbraume.

Wir denken uns einen elektrischen Punkt A im Luftraume befindlich, im Abstande a von der ebenen Oberfläche eines Dielektrikums; welchen Einfluß übt die Anwesenheit des Dielektrikums aus? Die Aufgabe entspricht der im § 32 für die leitende Ebene gelösten. Damals jedoch brauchten wir nur das Feld im Luftraume in Betracht zu ziehen, da jenseits der leitenden Ebene überhaupt kein Feld besteht. Jetzt wird auch das Feld innerhalb des Isolators zu berücksichtigen sein; wir wollen annehmen, daß der Isolator den ganzen Halbraum einnimmt. Seine Dielektrizitätskonstante sei ε_2, ε_1 diejenige der Luft.

Wir versuchen auch dieses Problem nach der Methode der elektrischen Bilder zu lösen. Wir denken uns wieder den Punkt B jenseits der ebenen Begrenzung des Halbraumes, der A spiegelbildlich entspricht, und nennen r, r' die Abstände eines Aufpunktes von A bzw. seinem Bilde B.

Wir setzen für das Potential im Luftraume

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r} - \frac{e'}{\varepsilon_1 r'}.$$

Es soll also das Feld im Luftraume der wahren Ladung e in A

und der fingierten wahren Ladung ($-e'$) in B entsprechen. Dieser Ansatz genügt der Grundbedingung, daß Quellen elektrischer Verschiebung innerhalb des Luftraumes nur in A vorhanden sind; denn der Bildpunkt B liegt ja außerhalb des Luftraumes.

Was nun das Feld innerhalb des Dielektrikums anbelangt, so wollen wir versuchen, es durch den Ansatz für das Potential im Dielektrikum

$$\varphi_2 = \frac{e''}{\varepsilon_2 r}$$

darzustellen. Es soll also das Feld in dem Isolator so beschaffen sein, als ob der Isolator unendlich ausgedehnt und in A die wahre Ladung e'' befindlich wäre. Dieser Ansatz entspricht der Bedingung, daß innerhalb des wirklich von dem Dielektrikum erfüllten Halbraumes Quellen oder Senken elektrischer Verschiebung nicht vorkommen.

Man zeigt, daß das Feld wirklich durch diese Ansätze dargestellt wird, indem man nachweist, daß die Grenzbedingungen an der Begrenzungsebene des Dielektrikums durch geeignete Verfügung über die bisher unbestimmten Größen e', e'' zu erfüllen sind. Was zunächst die Normalkomponenten von $\mathfrak{D}$ anbelangt, so ist

$$\mathfrak{D}_{n1} = + e\frac{a}{r^3} + e'\frac{a}{r'^3}, \quad \mathfrak{D}_{n2} = - e''\frac{a}{r^3},$$

wobei die Normalen n_1, n_2 von dem betreffenden Körper nach der Grenzfläche hinweisend angenommen sind. Die Grenzbedingung (129d) verlangt nun das Verschwinden der Flächendivergenz von $\mathfrak{D}$; da $r = r'$, so ist die Forderung dieser ersten Grenzbedingung

$$e + e' - e'' = 0.$$

Anderseits sollen die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ zu beiden Seiten der Trennungsebene die gleichen Werte besitzen; dies wird jedenfalls dann der Fall sein, wenn $\varphi_1 = \varphi_2$ längs der Ebene erfüllt ist, denn $\mathfrak{E}$ ist ja der negative Gradient von φ. Die Bedingung $\varphi_1 = \varphi_2$ ist nicht nur hinreichend, sie ist auch notwendig, wenn Doppelschichten freier Elektrizität an der Oberfläche des Isolators ausgeschlossen werden. Wir verlangen also zweitens

$$\frac{e - e'}{\varepsilon_1} = \frac{e''}{\varepsilon_2}.$$

Man erhält aus den beiden in e, e', e'' linearen Gleichungen

$$(133) \quad \begin{cases} \dfrac{e-e'}{e+e'} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad e' = e \cdot \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}, \\ e'' = e + e' = e \cdot \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}. \end{cases}$$

Hierdurch sind die fingierten „wahren" Ladungen $(-e')$ in B, $(+e'')$ in A bestimmt. Die Kraftlinien innerhalb des Dielektrikums verlaufen so, daß sie radial von A auszugehen scheinen, während im Luftraume das Feld durch Überlagerung zweier von dem Quellpunkte A und dem Senkpunkte B herrührender Felder sich darstellen läßt.

Ersetzt man das Dielektrikum durch einen Leiter, so hat man nach § 32, um das Potential im Luftraume zu bestimmen, dem Bildpunkte B die Ladung $(-e)$ zu geben. Es ist also die störende Wirkung des Dielektrikums auf die Feldstärke im Luftraume, verglichen mit der störenden Wirkung des Leiters, zu messen durch

$$e' : e = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 : \varepsilon_2 + \varepsilon_1.$$

Das Dielektrikum übt also stets einen geringeren Einfluß aus als der Leiter. Im Grenzfalle indessen, wo die Dielektrizitätskonstante ε_2 des Isolators sehr groß ist gegen diejenige der Luft, wird $e' = e$, d. h. der Leiter beeinflußt das Feld im Luftraume ebenso wie ein Isolator von unendlich großer Dielektrizitätskonstante.

Was ferner die Feldstärke innerhalb des Dielektrikums betrifft, so entspricht diese der in A befindlichen freien Ladung $\frac{e''}{\varepsilon_2}$ in einem unbegrenzten Dielektrikum; würde das Dielektrikum entfernt, so wäre die Feldstärke hier aus der freien Ladung $\frac{e}{\varepsilon_1}$ zu bestimmen, welche dem im Luftraume befindlichen Punkte A wirklich zukommt. Das Eindringen des Feldes wird demnach gemessen durch den Quotienten

$$\frac{e''}{\varepsilon_2} : \frac{e}{\varepsilon_1} = 2\varepsilon_1 : \varepsilon_2 + \varepsilon_1.$$

Im Grenzfalle unendlicher Dielektrizitätskonstante ε_2 ist die elektrische Feldstärke im Innern des Isolators Null, genau wie im Innern eines Leiters.

Für das Eindringen der elektrischen Verschiebung trifft das allerdings nicht zu; dieses wird gemessen durch das Verhältnis der wahren Ladungen

$$e'' : e = 2\varepsilon_2 : \varepsilon_2 + \varepsilon_1,$$

welches im Grenzfalle eines unendlichen Wertes von ε_2 gleich 2 wird. Die Zahl der in den Halbraum eintretenden Verschiebungslinien wäre offenbar, falls der ganze Raum mit Luft gefüllt wäre, gleich $2\pi e$, entsprechend der halben wahren Ladung von A; denn die Verschiebungslinien würden in diesem Falle von A radial ausgehen, nach allen Seiten in gleicher Dichte. Ist hingegen der Halbraum von dem Dielektrikum eingenommen, so entspricht, wie wir sehen, die eintretende elektrische Verschiebung einer in A befindlichen wahren Ladung e''; mithin ist die Zahl der in den Halbraum eintretenden Verschiebungslinien

$$2\pi e'' = 4\pi e \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}.$$

Auf der Grenzebene der beiden Dielektrika können keine Verschiebungslinien beginnen oder endigen, weil hier keine wahre Elektrizität ist. Es muß demnach von den $4\pi e$ Verschiebungslinien, welche im Punkte A beginnen, der Teil

$$4\pi e \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}$$

jenseits des Dielektrikums endigen, der Rest

$$4\pi e \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}$$

jenseits des Luftraumes; hier sind etwa leitende Körper anzunehmen, auf denen die Verschiebungslinien endigen. Im Grenzfalle $\varepsilon_2 = \infty$ befindet sich die wahre Ladung $-e$ jenseits des Dielektrikums, während sie in dem zum Vergleiche herangezogenen Falle des Leiters auf der Leiteroberfläche sitzt. Die freie Ladung hingegen verteilt sich in dem hier betrachteten Falle über die Begrenzungsebene des Dielektrikums von unendlicher Dielektrizitätskonstante genau so wie über die Oberfläche des Leiters, da ja die Feldstärken in beiden Fällen die gleichen sind.

§ 38. Die Polarisation der Dielektrika.

Wir kehren zum allgemeinen Falle beliebiger isotroper Dielektrika zurück. Dieselben mögen teils an die mit wahrer Elektrizität geladenen Leiter unmittelbar angrenzen, teils in den leeren Raum eingebettet sein. Wir wollen jetzt versuchen, das elektrische Feld in zwei Felder zu zerlegen, von denen das erste $\mathfrak{E}_0$ von der an der Oberfläche der Leiter befindlichen wahren Elektrizität herrührt, während das zweite $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$ von den dielektrischen Körpern auszugehen scheint. Dabei soll $\mathfrak{E}_0$ aus der Flächendichte ω der wahren Elektrizität nach den Gesetzen berechnet werden, die für das Feld im leeren Raume gelten, also folgendermaßen

$$\mathfrak{E}_0 = -\nabla\varphi_0, \qquad \varphi_0 = \int \frac{df\omega}{r}.$$

Zu dem Potentiale φ_0 liefern nur die Flächen Beiträge, in denen die Metalle an den leeren Raum bzw. an Dielektrika angrenzen.

Für das Feld $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$ gilt jetzt, nach (130a)

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = -\nabla(\varphi - \varphi_0), \quad \varphi - \varphi_0 = \int \frac{dv\varrho'}{r} + \int \frac{df(\omega' - \omega)}{r};$$

zu dem Potentiale $\varphi - \varphi_0$ liefern demnach alle mit freier Elektrizität behafteten Stücke der Dielektrika Beiträge sowie die Grenzflächen, welche Dielektrika vom Äther bzw. von den Metallen, oder welche zwei Dielektrika voneinander trennen. Dabei gilt an solchen Trennungsflächen, nach (127b und 129a),

$$\omega' - \omega = -\frac{1}{4\pi}\{\mathfrak{E}_{n1} - \mathfrak{D}_{n1} + \mathfrak{E}_{n2} - \mathfrak{D}_{n2}\}.$$

Im Äther sind ferner die Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ einander gleich, während im Innern der Metalle ein elektrostatisches Feld überhaupt nicht auftritt. Es bleibt daher an den Flächen, in denen ein Dielektrikum an den leeren Raum oder an ein Metall angrenzt, nur der auf das Dielektrikum bezügliche Summand bestehen

$$\omega' - \omega = -\frac{1}{4\pi}\{\mathfrak{E}_n - \mathfrak{D}_n\},$$

wo n die von dem Innern des Dielektrikums aus nach der Oberfläche hinweisende Normale bezeichnet.

An der Trennungsfläche zweier Dielektrika bleibt der obige allgemeinere Ausdruck für $(\omega' - \omega)$ gültig, der sich aus zwei auf die einzelnen Dielektrika bezüglichen Gliedern zusammensetzt. Wir wollen jedoch den Übergang eines Dielektrikums in ein anderes als stetig voraussetzen, so daß die Übergangsschicht als inhomogenes, mit freier räumlicher Ladung behaftetes Dielektrikum anzusehen ist. Es gilt hier, wie überhaupt in inhomogenen Isolatoren, nach (129, 129c)

$$\varrho' = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} (\mathfrak{E} - \mathfrak{D}).$$

Wir führen nunmehr einen neuen Vektor $\mathfrak{P}$ ein

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{D} - \mathfrak{E}) = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathfrak{E}, \tag{134}$$

den wir „elektrische Polarisation" des Dielektrikums nennen. Dann wird an der Grenzfläche des Dielektrikums, sei es, daß Metall oder daß Äther an dieses angrenzt, wenn n die vom Dielektrikum aus nach der Grenzfläche weisende Normale bezeichnet,

$$\omega' - \omega = \mathfrak{P}_n, \tag{134a}$$

und im Innern des Dielektrikums

$$\varrho' = - \operatorname{div} \mathfrak{P}. \tag{134b}$$

Demgemäß ist das Potential des Feldes $(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0)$

$$\varphi - \varphi_0 = - \int \frac{dv}{r} \operatorname{div} \mathfrak{P} + \int \frac{df}{r} \mathfrak{P}_n.$$

Wendet man auf den von dem Dielektrikum eingenommenen Raum die aus dem Gaußschen Satze abgeleitete Integraltransformation (66) an, so wird

$$\int \frac{df\, \mathfrak{P}_n}{r} = \int dv \left\{ \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathfrak{P} + \mathfrak{P} \nabla_q \frac{1}{r} \right\},$$

wobei ∇_q den Quellpunktgradienten darstellt (vgl. § 15). Der Aufpunkt, der irgendwo im Raume liegen kann, wird bei Ausführung der Verrückung festgehalten. Durch Anwendung dieser Umformung erhält man

$$\varphi - \varphi_0 = \int dv \left(\mathfrak{P} \nabla_q \frac{1}{r} \right) \tag{134c}$$

als Potential des Dielektrikums.

Die physikalische Bedeutung dieses Ausdruckes geht aus der Formel (79) hervor, die im § 15 für das Potential einer Doppelquelle erhalten wurde. Es war, wenn $\mathfrak{m}$ das Moment einer solchen bezeichnet,

$$\left(\mathfrak{m}\nabla_q \frac{1}{r}\right)$$

das Potential der erzeugten Strömung. Wir können demnach jetzt das wirbelfreie Feld $(\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_0)$ als von Doppelquellen erzeugt ansehen. Dabei ist $\mathfrak{P}dv$ das Moment der im Stücke dv des Dielektrikums enthaltenen Doppelquellen, mithin $\mathfrak{P}$ das Moment der Volumeinheit. Wir können etwa das Dielektrikum in zylindrische Stücke zerlegen, von dem Querschnitte σ und der Höhe l, deren Grundflächen zu $\mathfrak{P}$ senkrecht sind. Dann ist

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{P}\sigma l$$

das Moment des einzelnen Stückes.

Erinnern wir uns nun der Art, wie im § 15 das Moment der Doppelquelle definiert wurde. Es wurde ein Quellpunkt und ein Senkpunkt angenommen; die vom Senkpunkt nach dem Quellpunkt weisende Richtung gab die Richtung von $\mathfrak{m}$ an, das Produkt aus der Ergiebigkeit des Quellpunktes und dem Abstand l vom Senkpunkte den Betrag dieses Vektors. Wir haben demnach die Grundflächen aller der zylindrischen Stücke mit Ladungen $\pm|\mathfrak{P}|\sigma$ zu belegen und diese als Doppelquelle des Kraftflusses zu betrachten. Das durch (134c) gegebene Feld $\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_0$ stimmt sowohl außerhalb wie auch innerhalb des vom Dielektrikum eingenommenen Raumes mit dem Felde überein, welches ein solches System von Doppelquellen des Kraftflusses im Äther erzeugen würde. So rechtfertigt sich auch die Bezeichnung des Vektors $\mathfrak{P}$ als elektrische Polarisation des Dielektrikums.

Wir sind bisher analytisch vorgegangen, indem wir das Dielektrikum zunächst als Ganzes behandelten und dann in Stücke zerlegten. Wir können auch synthetisch verfahren, indem wir von den einzelnen Stücken ausgehen; denken wir uns aus einem solchen zylindrischen Stück, dessen Mantelfläche von Kraftlinien gebildet wird, den Stoff entfernt, das Feld aber unverändert ge-

lassen, so werden zwar an der Mantelfläche die Grenzbedingungen erfüllt sein, welche Stetigkeit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und der normalen Komponenten von $\mathfrak{D}$ verlangen, aber an den Grundflächen nicht ohne weiteres. Die elektrische Verschiebung durch die Querschnitte des Zylinders, die vor Entfernung des Stoffes $|\mathfrak{D}|\sigma$ betrug, ist jetzt nur $|\mathfrak{E}|\sigma$. Außerhalb des Zylinders hingegen besteht dieselbe elektrische Verschiebung wie vorher.

Es beginnen also jetzt auf den Grundflächen des Zylinders Verschiebungslinien in der Zahl

$$\pm\sigma\{|\mathfrak{D}|-|\mathfrak{E}|\}=\pm 4\pi\sigma|\mathfrak{P}|.$$

Das ist nur möglich, wenn daselbst wahre Ladungen mit der Flächendichte $\pm|\mathfrak{P}|$ ihren Sitz haben. Der in dem Stücke enthaltene Stoff läßt sich hinsichtlich seines Einflusses auf das elektrische Feld durch eine solche Doppelbelegung ersetzen. Man kann nun nacheinander den Stoff aus den einzelnen Stücken des Dielektrikums entfernen und statt ihrer fingierte Flächenbelegungen der Grundfläche mit positiver und negativer Elektrizität einführen. So gelangt man zur Formel (134c) für das Potential des Dielektrikums.

Ist das Produkt $\sigma|\mathfrak{P}|$ längs einer aus Kraftlinien gebildeten Röhre konstant, so heben sich die positiven und negativen Ladungen benachbarter Stücke auf. In einem homogenen Dielektrikum, wo ε konstant ist und daher $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{D}$ nur um konstante Faktoren verschieden sind, findet dieses statt; hier bleiben nur auf der Begrenzungsebene des Dielektrikums fingierte Ladungen übrig. In einem inhomogenen Dielektrikum hingegen, wo ε von Ort zu Ort wechselt, heben sich die Flächenbelegungen der Stücke nicht auf, sie geben Anlaß zu einer räumlichen Divergenz von $\mathfrak{E}$, d. h. zu freier Elektrizität im Innern des Dielektrikums. Dieser Gedankengang, mathematisch gefaßt, würde uns zur Ausgangsformel für $\varphi-\varphi_0$ zurückführen.

Es geht aus diesen Betrachtungen hervor, daß die Annahme einer elektrischen Polarisation der Isolatoren ein Kunstgriff ist, mit dessen Hilfe man die Bestimmung des elektrischen Feldes bei Anwesenheit beliebiger Dielektrika auf die im vorigen Kapitel

gelöste Aufgabe zurückführen kann, das Feld elektrischer Ladungen im Äther zu ermitteln. Das Feld $\mathfrak{E}$ setzt sich zusammen aus dem von der wahren Elektrizität erzeugten und dem vom polarisierten Dielektrikum herrührenden Felde. Es ist

$$(135) \qquad \mathfrak{E} = -\nabla\varphi, \qquad \varphi = \int \frac{df\omega}{r} + \int dv \left(\mathfrak{P}\nabla_q \frac{1}{r}\right)$$

der allgemeine Ausdruck für das gesamte Feld.

Ist das Feld geladener Leiter im leeren Raume bekannt, und handelt es sich darum, den störenden Einfluß eines in das Feld gebrachten Isolators zu ermitteln, so reicht die Formel (135) zur Lösung des Problems keineswegs aus. Denn selbst, wenn die entstehende Polarisation des Dielektrikums bekannt wäre, so würde doch die Verteilung der wahren Elektrizität auf dem Leiter durch Einführung des Dielektrikums geändert sein, und es wäre unzulässig, für die Flächendichte ω der wahren Elektrizität den vor Einführung des Isolators geltenden Wert zu setzen. Das ist nur dann gestattet, wenn das eingeführte Dielektrikum so klein, seine Polarisation so gering oder seine Entfernung von den Oberflächen der Leiter so groß ist, daß seine Rückwirkung auf die dortige Elektrizitätsverteilung zu vernachlässigen ist. In diesem Falle kann man das Feld $\mathfrak{E}_0$ als gegeben betrachten; es führt dann die Formel (135) die Bestimmung des Gesamtfeldes auf die Aufgabe zurück, die Polarisation des Dielektrikums zu finden. Indessen, in dieser Allgemeinheit ist auch die letztgenannte Aufgabe kaum lösbar. Man wird sie weiter vereinfachen, indem man ein gleichförmiges Feld $\mathfrak{E}_0$ annimmt, ferner das Dielektrikum als gleichförmig, d. h. ε als durchweg konstant betrachtet; endlich wird man sich auf einfache Körperformen beschränken. Wir behandeln im folgenden Paragraphen die einfachste, nämlich die Kugel.

§ 39. Eine gleichförmig polarisierte Kugel.

Es soll jetzt die Polarisation ermittelt werden, welche eine isotrope Kugel in einem gleichförmigen äußeren Felde $\mathfrak{E}_0$ annimmt. Wir behaupten, daß diese Polarisation ihrerseits gleich-

förmig, d. h. daß der Vektor $\mathfrak{P}$ in der ganzen Kugel nach Betrag und Richtung konstant ist. Um diese Behauptung zu beweisen, bestimmen wir zunächst das Feld $\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_0$, welches von der gleichförmig polarisierten Kugel herrührt, und zeigen dann, daß es sich, zusammen mit $\mathfrak{E}_0$, den Bedingungen an der Grenzfläche der Kugel anpaßt.

Wir setzen $$\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_0+(\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_0),$$

nehmen $\mathfrak{E}_0$ in dem betrachteten, von der dielektrischen Kugel eingenommenen Raume als konstant an und erhalten aus (135) das Potential der gleichförmig polarisierten Kugel

$$\varphi-\varphi_0=\int dv\left(\mathfrak{P}\nabla_q\frac{1}{r}\right)=\mathfrak{P}\int dv\nabla_q\frac{1}{r}\cdot$$

Wir können diesen Ausdruck folgendermaßen deuten: Man berechne das Potential einer mit der konstanten räumlichen Dichte ϱ geladenen Kugel und einer mit der Dichte $-\varrho$ geladenen, um die Strecke $l=\frac{|\mathfrak{P}|}{\varrho}$ in einer dem Vektor $\mathfrak{P}$ entgegengesetzten Richtung gegen die erste verschobenen, und gehe zur Grenze l gleich Null über, indem man ϱ immer größer macht. Der Grenzwert ergibt das obige Potential der gleichförmig polarisierten Kugel, deren Moment pro Volumeinheit $\mathfrak{P}$ ist. Man hat nun solche Punkte zu unterscheiden, die außerhalb und die innerhalb der Kugel liegen. Es sei a der Radius der Kugel, R der Abstand eines Aufpunktes von ihrem Mittelpunkte.

Außerhalb wirkt jede der beiden mit der Dichte ϱ bzw. $-\varrho$ geladenen Kugeln so, als ob ihre gesamte Ladung $V\varrho$, $-V\varrho$ im Mittelpunkte vereinigt wäre (vgl. § 16). Geht man zur Grenze über, indem man den Abstand l der Kugelmittelpunkte kleiner und kleiner macht, so erhält man eine Doppelquelle, deren Moment dem Betrage nach gegeben ist durch

$$V\varrho l=|\mathfrak{P}|V;$$

da ferner die Richtung und der Sinn des Momentes der Verrückung vom Mittelpunkte der negativen zu dem der positiven Kugel entsprechen, d. h. dem Vektor $\mathfrak{P}$, so ist

$$\varphi-\varphi_0=\mathfrak{P}V\nabla_q\frac{1}{R}=-\mathfrak{P}\frac{4\pi a^3}{3}\nabla_a\frac{1}{R}=\frac{4\pi}{3}\frac{a^3}{R^3}(\mathfrak{R}\mathfrak{P}) \tag{136}$$

das Potential der gleichförmig polarisierten Kugel für $R \geqq a$, wobei $\mathfrak{R}$ den vom Mittelpunkte der Kugel nach dem Aufpunkte hin gezogenen Fahrstrahl darstellt.

Für einen innerhalb gelegenen Aufpunkt ist das Potential der beiden positiv bzw. negativ geladenen Kugeln nach Gleichung (83b) des § 16

$$\pm\left(2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3} R^2\right) \varrho .$$

Die beiden Kugeln sind jetzt um l gegeneinander verschoben zu denken, und es ist zur Grenze l gleich Null überzugehen. Man erhält, wenn man berücksichtigt, daß der Quellpunktgradient von R^2 dem Aufpunktgradienten entgegengesetzt gleich ist (vgl. § 15), als Gesamtpotential

$$\mathfrak{P}\nabla_q \left\{2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3} R^2\right\} = + \mathfrak{P}\nabla_a \frac{2\pi}{3} R^2;$$

da ferner gilt
$$\nabla_a R^2 = 2R,$$

so wird das Potential der gleichförmig polarisierten Kugel

(136a) $$\varphi - \varphi_0 = \frac{4\pi}{3}(\mathfrak{R}\mathfrak{P}), \quad \text{für } R \leqq a.$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß für $R = a$ die Potentiale (136) und (136a) stetig ineinander übergehen. Das von der polarisierten Kugel erzeugte Feld wird innerhalb derselben

(136b) $$\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = -\nabla(\varphi - \varphi_0) = -\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}, \quad R \leqq a.$$

Das Feld, das von der gleichförmig polarisierten Kugel erzeugt wird, ist innerhalb der Kugel selbst gleichförmig und der Polarisation entgegengerichtet.

Außerhalb der Kugel mögen die Komponenten des Vektors $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$ auf rechtwinklige Koordinaten xyz bezogen werden, wobei die z-Achse in der Richtung von $\mathfrak{P}$ gelegt werde. Es ist nach (136)

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{4\pi a^3}{3} |\mathfrak{P}| \frac{z}{R^3} = V|\mathfrak{P}| \frac{z}{R^3}, \qquad \text{daher}$$

(136c) $$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{E}_x - \mathfrak{E}_{0x} = V|\mathfrak{P}|\frac{3zx}{R^5}, \quad \mathfrak{E}_y - \mathfrak{E}_{0y} = V|\mathfrak{P}|\frac{3zy}{R^5} \\ &\mathfrak{E}_z - \mathfrak{E}_{0z} = V|\mathfrak{P}|\left(\frac{3z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3}\right) \end{aligned}\right\} R \geqq a.$$

Wir fragen jetzt, welche Feldstärke $\mathfrak{E}_0$ vor Einführung der dielektrischen Kugel vorhanden sein mußte, damit die Kugel, in das Feld gebracht, die Polarisation $\mathfrak{P}$ erhält. Es liegt nahe, $\mathfrak{E}_0$ gleichfalls der z-Achse parallel anzunehmen. Wir berechnen die radiale und die zur Kugel tangentielle Komponente der Feldstärke $\mathfrak{E}$; innerhalb der dielektrischen Kugel ist nach (136 b)

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{E}_r &= |\mathfrak{E}_0|\cos\vartheta - \frac{4\pi}{3}|\mathfrak{P}|\cos\vartheta\\ \mathfrak{E}_\vartheta &= |\mathfrak{E}_0|\sin\vartheta - \frac{4\pi}{3}|\mathfrak{P}|\sin\vartheta\end{aligned}\right\} R < a.$$

Dabei gibt ϑ den Winkel an, den der Fahrstrahl mit der z-Achse einschließt, und $\mathfrak{E}_\vartheta$ die tangentielle Komponente von $\mathfrak{E}$, die längs der Meridiane der Kugeln weist.

Außerhalb der Kugel hingegen ist nach (136 c)

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{E}_r &= |\mathfrak{E}_0|\cos\vartheta + \frac{4\pi a^3}{3}|\mathfrak{P}|\frac{2\cos\vartheta}{R^3}\\ \mathfrak{E}_\vartheta &= |\mathfrak{E}_0|\sin\vartheta - \frac{4\pi a^3}{3}|\mathfrak{P}|\frac{\sin\vartheta}{R^3}\end{aligned}\right\} R \geqq a.$$

Nun verlangen die Grenzbedingungen, die an der Oberfläche des Dielektrikums gelten: erstens sollen die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ innerhalb und außerhalb der Kugel die gleichen Werte besitzen; da $\mathfrak{E}_0$ innerhalb und außerhalb derselbe Vektor ist, so ist diese Bedingung für $R = a$ bereits erfüllt. Zweitens sollen die Normalkomponenten der elektrischen Verschiebung innerhalb und außerhalb der Kugel für $R = a$ die gleichen Werte besitzen.

Im Äther ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, im Dielektrikum $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$.

Mithin verlangt die zweite Grenzbedingung

$$\varepsilon\left\{|\mathfrak{E}_0| - \frac{4\pi}{3}|\mathfrak{P}|\right\} = |\mathfrak{E}_0| + \frac{8\pi}{3}|\mathfrak{P}|,$$

oder

$$\frac{4\pi}{3}|\mathfrak{P}|(\varepsilon + 2) = |\mathfrak{E}_0|(\varepsilon - 1),$$

und da die Richtungen der beiden Vektoren $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{P}$ übereinstimmend gewählt waren,

$$\mathfrak{P} = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\,\mathfrak{E}_0. \tag{137}$$

Die so bestimmte äußere Feldstärke genügt allen Bedingungen des Problems. Umgekehrt, wenn die dielektrische Kugel in ein gleichförmiges Feld $\mathfrak{E}_0$ gebracht wird, so entsteht eine Polarisation, die gleichförmig und $\mathfrak{E}_0$ parallel ist und die genauer durch (137) bestimmt wird. Was die gesamte Feldstärke im Innern der Kugel anbelangt, so beträgt dieselbe nach (136b)

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 - \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P} = \frac{3}{\varepsilon + 2}\mathfrak{E}_0; \tag{137a}$$

die elektrische Verschiebung endlich ist nach (134)

$$\mathfrak{D} = 4\pi\mathfrak{P} + \mathfrak{E} = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2}\mathfrak{E}_0. \tag{137b}$$

Das Feld außerhalb der Kugel entsteht durch Zusammensetzung des ursprünglichen Feldes $\mathfrak{E}_0$ und des Feldes, das von einer im Mittelpunkte der Kugel befindlichen Doppelquelle des Kraftflusses vom Momente (vgl. 136)

$$\mathfrak{P}V = \mathfrak{P}\frac{4\pi a^3}{3} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}a^3\mathfrak{E}_0 \qquad \text{erzeugt wird.} \tag{137c}$$

Es ist von Interesse, den Grenzfall $\varepsilon = \infty$ zu betrachten. Hier wird nach (137a) innerhalb der Kugel $\mathfrak{E}$ gleich Null, das Potential demnach konstant; das war die Bedingung, die für die leitende Kugel galt; es stimmt also das dieser Grenzbedingung entsprechende äußere Feld überein mit dem Felde einer leitenden Kugel von der Gesamtladung Null. Die störende Wirkung einer solchen leitenden Kugel läßt sich demnach durch eine Doppelquelle vom Momente $a^3\mathfrak{E}_0$ im Mittelpunkte der Kugel darstellen.

Alle diese Folgerungen setzen, wie schon bemerkt wurde, voraus, daß die in das Feld $\mathfrak{E}$ gebrachte Kugel, sei sie nun leitend oder dielektrisch, die ursprüngliche Verteilung wahrer Elektrizität, welche das Feld $\mathfrak{E}_0$ im Äther erzeugte, nicht wesentlich ändert.

Drittes Kapitel.

Die Energie und die mechanischen Kräfte des elektrostatischen Feldes.

§ 40. Nahewirkungstheorie und Fernwirkungstheorie.

Als ein Merkmal des elektrostatischen Feldes wurde im § 28 das Fehlen einer das Bestehen des Feldes begleitenden Wärmeentwickelung angesehen. Würde eine solche stattfinden, so wäre zur Erhaltung des Feldes eine dauernde Energiezufuhr erforderlich. Das ist nicht der Fall. Wohl aber ist eine einmalige Arbeitsleistung notwendig, um das Feld zu erregen, eine Arbeitsleistung, die nach dem Energieprinzip von dem Wege, auf dem die Herstellung des Feldes geschah, unabhängig ist. Diese Arbeitsleistung ist das Maß der Energie des elektrostatischen Feldes, bezogen auf den unelektrischen Zustand. Beim Erlöschen des Feldes geht die elektrische Energie wiederum in andere Energieformen über.

Die Fernwirkungstheorie der Elektrizität sah den elektrischen Zustand als einen eigentümlichen Zustand der Körper an und als wesentlichste Zustandsgröße die elektrische Ladung der Körper; dementsprechend ging sie von einer Definition der elektrischen Energie aus, welche diese von den Ladungen und Potentialen der Körper abhängig machte. Die Nahewirkungstheorie hingegen sieht das ganze Feld als Träger des elektrischen Zustandes an und als wesentlichste Zustandsgrößen die beiden Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, die elektrische Feldstärke und die elektrische Verschiebung. Demgemäß verteilt sie die elektrische Energie über das ganze Feld; jeder Raumteil liefert einen Beitrag zu der Feldenergie, der nur von seinem elektrischen Zustande abhängt. Der auf die Volumeinheit entfallende Anteil an der Feldenergie soll nun gleich dem durch 8π geteilten skalaren Produkte der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$

$$\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) \qquad \text{sein.}$$

Seine Rechtfertigung findet dieser Ansatz dadurch, daß die

mechanischen Kräfte des elektrostatischen Feldes, die aus ihm abgeleitet werden, der Erfahrung entsprechen Bevor wir dieses nachweisen, wollen wir indessen zeigen, daß für die gesamte Energie des elektrostatischen Feldes aus der Nahewirkungstheorie sich der gleiche Wert ergibt wie aus der Fernwirkungstheorie.

Die gesamte elektrische Feldenergie beträgt

$$U = \frac{1}{8\pi}\int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{D}). \tag{138}$$

Dabei ist nach (130) der Vektor $\mathfrak{E}$ wirbelfrei, $-\mathfrak{E}$ ist der Gradient des Potentiales φ. Der Ausdruck

$$U = -\frac{1}{8\pi}\int dv(\mathfrak{D}, \nabla\varphi)$$

wird nun mit Hilfe der aus dem Gaußschen Satze abgeleiteten Formel (66) umgeformt in

$$U = \frac{1}{8\pi}\int dv\varphi \operatorname{div} \mathfrak{D} - \frac{1}{8\pi}\int df\varphi\mathfrak{D}_n;$$

n bezeichnet dabei die äußere Normale der Begrenzungsfläche f des betrachteten Raumes. Der Raum, über den das Integral zu erstrecken ist, ist hier der leere und der von Isolatoren erfüllte Raum; denn innerhalb der metallischen Leiter ist kein Feld und daher auch keine Feldenergie vorhanden. Auf das ganze Feld dürfen wir die Formel (66) allerdings nur dann anwenden, wenn keine Unstetigkeitsflächen das Feld durchsetzen. Wir haben uns bei der Anwendung jener Formel den Übergang aus einem Isolator in den anderen als stetig zu denken, so daß nur eine räumliche Divergenz von $\mathfrak{D}$, nicht eine Flächendivergenz in Rechnung zu ziehen ist; übrigens würden auch Unstetigkeitsflächen sich leicht berücksichtigen lassen durch Betrachtungen, die denen ganz ähnlich sind, die im § 23 zur Formel (108a) für die Energie des wirbelfreien Strömungsfeldes führten. Wir brauchen hierauf um so weniger einzugehen, als nach (129c, d) sowohl die räumliche Divergenz von $\mathfrak{D}$ im Innern der Dielektrika als auch an der Grenzfläche zweier Dielektrika die Flächendivergenz von $\mathfrak{D}$ verschwindet. Wahre Ladung tritt nur an der Oberfläche der Leiter auf. Ihre Flächendichte ω wird nach (129b) durch die

nach dem Innern des Isolators hinweisende Komponente von $\mathfrak{D}$, geteilt durch 4π, angegeben; sie ist in das Flächenintegral der letzten Formel einzusetzen, wobei, wegen des umgekehrten Normalensinnes, das Vorzeichen abzuändern ist. Da die unendlich entfernte Begrenzungsfläche f keinen Beitrag liefert, so wird die Energie U durch das über die Oberflächen der Leiter erstreckte Integral gegeben

$$U = \frac{1}{2}\int df \varphi \omega . \tag{138a}$$

Ebenso wie wir die Energie eines wirbelfreien Strömungsfeldes, die zunächst über das ganze Feld verteilt war, durch Integrale über das Quellengebiet ausdrücken konnten (84 bzw. 108a), so können wir die elektrostatische Energie, die nach der Maxwellschen Theorie über das Feld verteilt ist, auf eine Form bringen, in der sie über die wahren Ladungen verteilt erscheint; diese Verteilung der Energie über die wahren Ladungen ist die von der Fernwirkungstheorie angenommene. Das Potential φ ist dabei natürlich das Potential der freien elektrischen Ladungen.

Ist das Feld von einem homogenen isotropen Dielektrikum erfüllt, so treten auch die freien Ladungen nur an der Oberfläche der Leiter auf, und zwar mit der Dichte

$$\omega' = \frac{\omega}{\varepsilon} .$$

Dann wird, nach (130a)

$$\varphi = \int \frac{df \omega'}{r} = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{df \omega}{r} ,$$

daher

$$U = \frac{1}{2}\int df_1 \omega_1 \int \frac{df_2 \omega_2'}{r_{12}} .$$

Dabei kommt jedes Flächenstück der Leiteroberflächen zweimal vor, einmal als Träger der freien Elektrizität, die zu dem Potential einen Betrag liefert, das andere Mal als Träger der wahren Elektrizität. Rechnet man jedes Flächenstück nur einmal, so fällt der Faktor $\frac{1}{2}$ fort, und es wird

(138b) $$\left\{\begin{array}{l} U = \displaystyle\iint \frac{df_1\, df_2\, \omega_1\, \omega_2'}{r_{12}} = \\ \displaystyle\frac{1}{\varepsilon}\iint \frac{df_1\, df_2\, \omega_1\, \omega_2}{r_{12}} = \varepsilon \iint \frac{df_1\, df_2\, \omega_1'\, \omega_2'}{r_{12}}. \end{array}\right.$$

Hat man ein System wahrer Ladungen zuerst im leeren Raume und füllt dann den Raum mit einem Dielektrikum, so wird, bei konstant gehaltenen wahren Ladungen, die elektrostatische Energie im Verhältnis $1 : \varepsilon$ verkleinert, sie wird im Verhältnis $\varepsilon : 1$ vermehrt bei konstant gehaltenen freien Ladungen. In dem gleichen Verhältnis werden die aus der Energie abgeleiteten bewegenden Kräfte geschwächt bzw. verstärkt.

Da auf den Leitern das Potential φ konstante Werte $\varphi_1 \cdots \varphi_i \cdots \varphi_h$ annimmt, so kann man den allgemeinen Ausdruck (138a) der elektrostatischen Energie auch folgendermaßen schreiben:

(138c) $$U = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{h} \varphi_i e_i.$$

Bei der Anordnung des Kondensators, wo zwei entgegengesetzt gleiche Ladungen $\pm e$ vorhanden sind, wird (vgl. § 30)

(138d) $$U = \frac{1}{2}\, e(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{e^2}{2K} = \frac{K(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}.$$

Die Energie ist bei konstant gehaltener wahrer Ladung des Kondensators der reziproken Kapazität, bei konstant gehaltener Potentialdifferenz der Belegungen der Kapazität selbst proportional.

Da Fernwirkungstheorie und Nahewirkungstheorie für elektrostatische Felder zu demselben Werte der Gesamtenergie gelangen, so müssen sie auch stets dieselben Werte für die bewegenden Kräfte liefern. Denn diese Kräfte ergeben sich aus der Energie auf Grund mechanischer Prinzipien, wie wir sehen werden. Durch Beobachtungen über die Kräfte des elektrostatischen Feldes kann daher durchaus nicht zwischen den beiden Theorien entschieden werden. Der Vorzug der Maxwellschen Theorie liegt nicht auf dem Gebiete der statischen, sondern auf dem der rasch wechselnden Felder; dort, wo das elektrische Feld aufhört, wirbelfrei zu

sein, wo demnach ein skalares Potential nicht mehr besteht, wird der Ansatz, den die Fernwirkungstheorie für die Energie macht, hinfällig.

§ 41. Der Thomsonsche Satz.

Wir wollen in diesem Paragraphen von dem Grundproblem der Elektrostatik handeln. Gegeben sind eine Anzahl von Leitern und deren wahre Ladungen $e_1 \ldots e_h$, mithin die über die Leiteroberflächen $f_1 \ldots f_h$ erstreckten Integrale

$$(\alpha) \quad \int \mathfrak{D}_n df_1 = 4\pi e_1, \quad \int \mathfrak{D}_n df_2 = 4\pi e_2 \ldots, \quad \int \mathfrak{D}_n df_h = 4\pi e_h,$$

wo die Normale nach dem Isolator hinweist. Im Felde mögen sich beliebige Dielektrika befinden; im Innern derselben soll die Dichte der wahren Elektrizität

$$(\beta) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\varrho$$

gegeben sein, und ebenso die Flächendichte der wahren Elektrizität an der Trennungsfläche zweier Dielektrika, d. h.

$$(\gamma) \qquad \mathfrak{D}_{n1} + \mathfrak{D}_{n2} = 4\pi\omega.$$

Auch soll die Beziehung zwischen elektrischer Verschiebung $\mathfrak{D}$ und elektrischer Feldstärke $\mathfrak{E}$

$$(\delta) \qquad \mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$$

gelten, wo ε die Dielektrizitätskonstante des betreffenden Isolators ist. Die vier Bedingungen (α) bis (δ) wollen wir die „allgemeinen Bedingungen" nennen. Sie gelten, wie wir in späteren Abschnitten sehen werden, für ein ganz beliebiges elektrisches Feld. Für das elektrostatische Feld kommen noch die folgenden „besonderen Bedingungen" hinzu:

Es soll $\mathfrak{E}$ wirbelfrei, also der negative Gradient eines überall stetigen Potentiales sein

$$(\varepsilon) \qquad \mathfrak{E} = -\nabla\varphi.$$

Dieses Potential soll auf den Oberflächen der Leiter konstant sein. Es soll

$$(\zeta) \quad \varphi = \varphi_1 \text{ auf } f_1, \quad \varphi = \varphi_2 \text{ auf } f_2, \ldots \varphi = \varphi_h \text{ auf } f_h \text{ sein.}$$

Wir denken uns neben diesem elektrostatischen Felde noch ein anderes Feld, dessen Feldstärke $\mathfrak{E}'$ und elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}'$ sein mag. Die Vektoren $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{E}'$ sollen zwar den allgemeinen Bedingungen (α) bis (δ), aber nicht den besonderen Bedingungen (ε), (ζ) Genüge leisten. Dann behauptet der Thomsonsche Satz: das neue Feld $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'$ besitzt eine größere elektrische Energie als das elektrostatische Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$.

Um den Thomsonschen Satz zu beweisen, setzen wir

$$\mathfrak{E}' - \mathfrak{E} = \mathfrak{E}'', \qquad \mathfrak{D}' - \mathfrak{D} = \mathfrak{D}''.$$

Das neue Feld $\mathfrak{E}''$, $\mathfrak{D}''$ hat jetzt folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$(\alpha'') \qquad \int \mathfrak{D}''_n \, df_1 = 0, \ldots \int \mathfrak{D}''_n \, df_h = 0$$

an den Leiteroberflächen,

$$(\beta'') \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D}'' = 0$$

im Innern eines jeden Dielektrikums, und

$$(\gamma'') \qquad \mathfrak{D}''_{n1} + \mathfrak{D}''_{n2} = 0$$

an der Grenze zweier Dielektrika.

Endlich ist allgemein

$$(\delta'') \qquad \mathfrak{D}'' = \varepsilon \mathfrak{E}''.$$

Wir setzen jetzt U, U', U'' für die Energien der drei Felder und erhalten

$$8\pi U' = \int dv (\mathfrak{D}' \mathfrak{E}') = \int dv (\mathfrak{D} + \mathfrak{D}'', \mathfrak{E} + \mathfrak{E}'')$$

$$= 8\pi (U + U'') + \int dv \{ (\mathfrak{D}'' \mathfrak{E}) + (\mathfrak{D} \mathfrak{E}'') \},$$

oder nach (δ), (δ'')

$$U' = U + U'' + \frac{1}{4\pi} \int dv (\mathfrak{E} \mathfrak{D}'').$$

Nach (ε) ist

$$\int dv (\mathfrak{E} \mathfrak{D}'') = -\int dv (\mathfrak{D}'' \nabla \varphi),$$

und nach der Formel (66)

$$-\int dv (\mathfrak{D}'' \nabla \varphi) = \int dv \, \varphi \operatorname{div} \mathfrak{D}'' - \int df \, \varphi \, \mathfrak{D}_n'';$$

diese Formel ist allerdings nur auf die Gebiete anzuwenden, wo φ, $\mathfrak{D}$ sich stetig ändern; wir haben daher die Unstetigkeitsflächen,

die zwei Isolatoren trennen, zu der Begrenzung des Feldes zu rechnen. Jedes Flächenstück einer solchen kommt zweimal vor, sein Beitrag verschwindet nach (γ'') ebenso, wie das Volumintegral auf der rechten Seite der letzten Gleichung infolge von (β'') verschwindet. Es bleibt nur das über die Leiteroberflächen erstreckte Integral

$$-\int df \varphi \mathfrak{D}_n'',$$

in welchem wir das Vorzeichen umkehren müssen, um in Übereinstimmung mit der in (α, α'') angewandten Bezeichnung n nach dem Innern des Isolators rechnen zu dürfen. Es wird somit

$$\int dv (\mathfrak{E}\mathfrak{D}'') = \sum_{i=1}^{h} \int df_i \varphi \mathfrak{D}_n''.$$

Die Summe ist über die Oberflächen der h Leiter zu erstrecken. Da hier nach (ζ) φ konstant, so folgt aus (α''):

$$\int dv (\mathfrak{E}\mathfrak{D}'') = \sum_{i=1}^{h} \varphi_i \int df_i \mathfrak{D}_n'' = 0.$$

Daher wird schließlich

$$U' = U + U'',$$

wo

$$U'' = \frac{1}{8\pi}\int dv (\mathfrak{D}''\mathfrak{E}'') = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int dv \mathfrak{E}''^2$$

stets positiv ist, es sei denn, daß $\mathfrak{E}''$ verschwindet, in welchem Falle $\mathfrak{E}'$ mit $\mathfrak{E}$, d. h. das mit dem elektrostatischen zu vergleichende Feld diesem gleich sein würde. Jedes von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$ verschiedene elektrische Feld aber, welches den allgemeinen Grundgleichungen (α) bis (δ) Genüge leistet, ohne ein elektrostatisches Feld zu sein, besitzt eine größere Energie als das elektrostatische:

$$U' > U. \tag{139}$$

Oder anders ausgedrückt: unter allen elektrischen Feldern, welche den allgemeinen Bedingungen (α) bis (δ) Genüge leisten, besitzt das elektrostatische, das außerdem noch (ε) und (ζ) befriedigt, die kleinste Energie.

Der Thomsonsche Satz leitet also das Feld, welches der Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität entspricht, aus einem Minimal-

prinzip ab. Dieses Minimalprinzip entspricht ganz der Gleichgewichtsbedingung, die für schwere Körper im Schwerkraftfelde gilt; diese Körper befinden sich im Gleichgewicht, und zwar im stabilen Gleichgewicht, wenn die potentielle Energie der Schwerkraft in der betreffenden Konfiguration ihren kleinsten Wert annimmt. Ebenso sehen wir hier, daß das Gleichgewicht der Elektrizität, die sich auf der Oberfläche festgehaltener Leiter befindet, durch ein Minimum der elektrischen Energie gekennzeichnet ist. Die elektrische Energie spielt demnach hier dieselbe Rolle wie die potentielle Energie in der gewöhnlichen Mechanik.

Noch in anderer Hinsicht sind die obigen Entwickelungen bedeutungsvoll. Sie zeigen, daß es nicht zwei verschiedene Lösungen des elektrostatischen Problems geben kann. Die Ungleichung (139) besagte nämlich, daß für jedes vom elektrostatischen verschiedene Feld $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'$, welches den Bedingungen (α) bis (δ) genügt, die Energie $U' > U$ ist. Ist nun $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'$ selbst ein elektrostatisches Feld, so muß außerdem $U > U'$ gelten, was unmöglich ist. Folglich kann es nicht zwei verschiedene Lösungen des elektrostatischen Problems geben; durch die Bedingungen (α) bis (ζ) ist das elektrostatische Feld eindeutig bestimmt.

Wir haben in früheren Abschnitten Lösungen des elektrostatischen Problems für besondere Fälle gefunden, z. B. für den Kugelkondensator, für das gestreckte Rotationsellipsoid, für eine dielektrische Kugel im gleichförmigen Felde. Wir stellten damals jedesmal eine partikuläre Lösung auf, ohne uns darum zu kümmern, ob diese die einzige mögliche ist. Jetzt sehen wir nachträglich, daß es in der Tat nur eine einzige Lösung geben kann.

§ 42. Das Gesetz von Coulomb.

Das Coulombsche Gesetz, welches die experimentelle Grundlage der Fernwirkungstheorie bildet, haben wir für zwei Punktladungen im leeren Raume bereits in § 28 als gültig nachgewiesen. Dabei haben wir aber für die mechanische Kraft den Ausdruck (116) ohne weiteres als gültig angenommen. Jetzt, wo wir über den Ausdruck der elektrischen Feldenergie verfügen,

wollen wir die bewegenden Kräfte des elektrostatischen Feldes aus der Energie ableiten; dabei wird sich dann ein anderer Beweis für das Coulombsche Gesetz ergeben. Hierzu ist außer den im vorigen Paragraphen zusammengestellten Eigenschaften des elektrostatischen Feldes und dem Ansatze (138) für die Feldenergie noch eine dritte, zunächst hypothetische Annahme nötig, die den Zusammenhang zwischen Energie und mechanischen Kräften betrifft.

Wir sahen (§ 40), daß die Feldenergie U nach dem Energieprinzip der Arbeit gleich ist, welche bei der Herstellung des Feldes geleistet wurde. Wir nehmen nun an, daß die Arbeit, welche die Kräfte des Feldes bei einer Verrückung der Leiter oder Dielektrika leisten, gleich der Abnahme der Feldenergie ist; es sollen also andere Energieumwandlungen außer der zwischen der elektrostatischen Feldenergie und der geleisteten mechanischen Arbeit bei dem ganzen Vorgange nicht im Spiele sein. Dabei ist natürlich ein abgeschlossenes System elektrischer Ladungen vorausgesetzt, und es ist angenommen, daß die Lagenänderung der Körper langsam genug erfolgt, um das Feld in jedem Augenblick als elektrostatisches ansehen zu können. Alsdann soll die elektrische Feldenergie die Rolle der potentiellen Energie spielen, nicht nur insofern, als der Thomsonsche Satz die Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität durch einen Mindestwert der elektrischen Feldenergie bei festgehaltenen Körpern kennzeichnet, sondern auch bezüglich der durch Lagenänderung der Körper aus dem Felde zu gewinnenden Arbeit.

Nehmen wir nun eine Lagenänderung der im Felde befindlichen Leiter oder Dielektrika vor, so entspricht der veränderten Lage auch eine veränderte Gleichgewichtsverteilung der auf den Leiteroberflächen angesammelten wahren Elektrizität. Wir wollen den Übergang von dem ersten elektrostatischen Felde zu dem zweiten, der veränderten Lage der Körper entsprechenden, in zwei Schritte zerlegen. Der erste Schritt soll, bei konstant gehaltener Lage der Körper, die Verteilung der wahren Elektrizität so abändern, wie es der beabsichtigten Lagenänderung der Körper entspricht, der zweite Schritt soll die Körper, ohne die Elektrizi-

tätsverteilung zu ändern, in die neue Lage überführen. Die gesamte Änderung der Feldenergie setzt sich demgemäß aus zwei Änderungen $\delta_1 U$, $\delta_2 U$ zusammen. $\delta_1 U$ stellt die Variation der Energie bei festgehaltener Lage und Gesamtladung der Körper vor, die infolge der Abänderung der Elektrizitätsverteilung eintritt, $\delta_2 U$ die Variation der Energie infolge der Lagenänderung der Körper bei festgehaltener Elektrizitätsverteilung; auf die Reihenfolge der Variationen kommt es nicht an, da diese unendlich klein sind. Nun besagte aber der im vorigen Paragraphen bewiesene Thomsonsche Satz, daß die Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität bei gegebener Gesamtladung und Lage der Körper einem Minimum von U entspricht. Es ist folglich

$$\delta_1 U = 0,$$

und die Arbeit, welche die Kräfte des elektrostatischen Feldes bei einer unendlich kleinen Lagenänderung leisten, ist

$$\delta A = -\delta U = -\delta_2 U. \tag{140}$$

Die virtuelle Arbeit ist also gleich der Abnahme der elektrostatischen Feldenergie bei einer virtuellen Verrückung der Körper; dabei soll die wahre Elektrizität als fest an den Stücken der Leiteroberflächen haftend angenommen werden.

Um nun aus diesem allgemeinen Prinzip das Coulombsche Gesetz abzuleiten, denken wir uns zwei kleine Leiter, etwa mit Goldblatt überzogene Holundermarkkügelchen, im leeren Raume befindlich, oder in ein homogenes flüssiges Dielektrikum eingebettet. Es seien e_1, e_2 die wahren Ladungen der Kügelchen, ihre Abmessungen seien klein gegen den Abstand R ihrer Mittelpunkte. Wir bedienen uns des Ausdruckes (138c) für die elektrostatische Energie, der in diesem Falle ergibt

$$U = \frac{1}{2} e_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} e_2 \varphi_2 .$$

Dabei sind φ_1, φ_2 die Potentiale der freien Ladungen, die an den Oberflächen der beiden Kügelchen sitzen,

$$\varphi_1 = \int \frac{df_1 \, \omega_1'}{r_{11}} + \int \frac{df_2 \, \omega_2'}{r_{12}}, \qquad \varphi_2 = \int \frac{df_2 \, \omega_2'}{r_{22}} + \int \frac{df_1 \, \omega_1'}{r_{12}} .$$

Die bei einer Vergrößerung des Abstandes R von den elektrischen Kräften geleistete Arbeit ist nun nach (140)

$$\delta A = -\delta_2 U = -\frac{1}{2} e_1 \delta \varphi_1 - \frac{1}{2} e_2 \delta \varphi_2 .$$

Bei der virtuellen Verrückung ist die Dichte ω der wahren Elektrizität auf den Kugeln konstant zu halten. Da nun der Isolator als homogen, d. h. seine Dielektrizitätskonstante als durchweg konstant angenommen werden soll, so sind auch die Dichten der freien Elektrizität

$$\omega_1' = \frac{1}{\varepsilon} \omega_1, \quad \omega_2' = \frac{1}{\varepsilon} \omega_2$$

bei der Verrückung konstant zu halten. Es sind also die Variationen der ersten Glieder in φ_1, φ_2 gleich Null zu setzen, und es bleiben nur die Variationen der zweiten, von den Wechselwirkungen der beiden Kügelchen herrührenden Glieder übrig.

Hier ist nun für r_{12} mit genügender Annäherung der Abstand R der Kugelmittelpunkte zu setzen. Sind ferner

$$e_1' = \int df_1 \omega_1' = \frac{1}{\varepsilon} e_1, \quad e_2' = \int df_2 \omega_2' = \frac{1}{\varepsilon} e_2$$

die freien Ladungen der Kügelchen, so wird

$$-\delta \varphi_1 = \frac{e_2'}{R^2} \delta R, \quad -\delta \varphi_2 = \frac{e_1'}{R^2} \delta R,$$

mithin ist $\delta A = \left(\frac{e_1 e_2' + e_2 e_1'}{2 R^2} \right) \delta R$ die virtuelle Arbeit.

Die Kraft, mit der die Kügelchen sich abstoßen, beträgt daher

$$\mathfrak{K}_R = \frac{e_1 e_2}{\varepsilon R^2} = \frac{\varepsilon e_1' e_2'}{R^2}, \tag{140a}$$

wie es das Coulombsche Gesetz verlangt.

Aus der letzten Gleichung ersieht man, wie die mechanische Kraft von der Dielektrizitätskonstanten des Isolators abhängt. Führt man die Kügelchen, die sich zuerst in Luft gegenüberstanden, in Petroleum über, ohne daß sie mit einem Leiter in Berührung kommen, so bleiben ihre wahren Ladungen konstant, die abstoßende Kraft verkleinert sich im Verhältnis $1 : \varepsilon$. Hingegen wächst die Kraft im Verhältnis $\varepsilon : 1$, wenn wir die Kügel-

chen auf dasselbe Potential bringen, das sie vorher in Luft besaßen, etwa durch Berührung mit den Polen einer Batterie.

Die obige Ableitung läßt die Umstände, unter denen das Coulombsche Gesetz gilt, deutlich zutage treten. Das Coulombsche Gesetz gilt z. B. nicht mehr für die beiden Kügelchen, wenn außer ihnen sich im leeren Raume irgendwo ein begrenzter dielektrischer Körper befindet. Dann ruft nämlich das von den Kügelchen erregte Feld auf der Oberfläche des Dielektrikums freie Ladungen hervor, welche auf die Kügelchen zurückwirken, falls die Entfernung nicht zu groß ist. Ebenso hört das Coulombsche Gesetz auf, genau gültig zu sein, wenn das den Raum erfüllende Dielektrikum nicht homogen ist, d. h. wenn ε sich mit dem Orte ändert; dann ist es bei der obigen Betrachtung nicht mehr gestattet, die freien Ladungen der Kügelchen, als den wahren proportional, bei der Verrückung konstant zu halten. Glücklicherweise weicht für die Gase, deren Dielektrizitätskonstante wegen ihrer Kompressibilität vom Drucke abhängt, überhaupt der Wert von ε so wenig von 1 ab, daß die Kräfte, welche durch die Inhomogenität der als Isolatoren dienenden Gase bedingt sind, außerordentlich klein und meist ganz zu vernachlässigen sind.

Wir wollen das allgemeine, zur Berechnung der mechanischen Kräfte dienende Prinzip verwenden, um den Ansatz zu rechtfertigen, welchen wir früher für die Kraft auf einen in das Feld gebrachten Probekörper gemacht haben; würde doch das ganze System der Nahewirkungstheorie eine Lücke aufweisen, wenn die Wirkung des Feldes, durch die zuerst der Vektor $\mathfrak{E}$ ermittelt wurde, sich nicht jetzt auf Grund des Prinzips der virtuellen Arbeit als Folgerung der Theorie ergäbe. Wir bringen also jetzt ein einziges, mit Goldblatt überzogenes Holundermarkkügelchen in das homogene Dielektrikum in einigem Abstande von den Leitern und geben ihm eine Ladung, die so gering ist, daß sie die Verteilung der freien Elektrizität an den Leiteroberflächen nicht merklich beeinflußt. Durch Hereinbringen des Probekügelchens hat nun nach (138 b) das Feld einen Energiezuwachs erfahren

$$U_{12} = \int\int \frac{df_1\, df_2\, \omega_1\, \omega_2'}{r_{12}};$$

hier bezeichnet ω_1 die Dichte der wahren Elektrizität an der Oberfläche des Kügelchens, ω_2' die Dichte der freien Elektrizität, die sowohl an der Oberfläche des Kügelchens wie auch auf den Leitern sitzen kann. Bei der virtuellen Verrückung $\delta\mathfrak{s}$ des Kügelchens ist nun die Dichte der wahren Elektrizität konstant zu halten, unserem Prinzip gemäß. Mithin ist die Dichte der freien Elektrizität an der Oberfläche des Kügelchens konstant zu halten, weil es sich in einem homogenen Dielektrikum befindet. Es fällt daher in δU_{12} alles fort, was sich auf Wechselwirkungen der freien und wahren Ladungen des Kügelchens selbst bezieht.

Es war nun angenommen, daß das Hereinbringen des Probekörpers in das Feld die ursprüngliche Verteilung der freien Elektrizität nicht merklich ändert. Es darf demnach der Probekörper nicht zu nahe an die Leiteroberflächen heranrücken.

Ist diese Bedingung erfüllt und sind ferner die Abmessungen des Probekörpers hinreichend klein, so kann für r_{12} der Abstand des Mittelpunktes des Kügelchens von dem betreffenden Flächenstücke df_2 gesetzt und das äußere Feld als über die Ausdehnung des Kügelchens hin gleichförmig betrachtet werden. Alsdann wird gemäß (140) die Arbeit bei der virtuellen Verrückung des Kügelchens:

$$\delta A = -\delta_2 U_{12} = -\int df_1 \omega_1 \cdot \delta \int \frac{df_2 \omega_2'}{r_{12}} = -e_1 \delta\varphi,$$

wo e_1 die wahre Ladung des Kügelchens, φ das Potential in dem Punkte ist, an welchen man den Mittelpunkt des Kügelchens bringt. Die Kraft $\mathfrak{K}$, die auf das Kügelchen wirkt, folgt aus

$$(\mathfrak{K}\delta\mathfrak{s}) = \delta A = -e_1\delta\varphi = -e_1(\nabla\varphi, \delta\mathfrak{s}).$$

Da nun diese Beziehung gelten muß, welches auch die Richtung des Vektors $\mathfrak{s}$ sein mag, so müssen die Vektoren, mit denen $\mathfrak{s}$ hier skalar multipliziert erscheint, einander gleich sein; es ergibt sich mithin

$$\mathfrak{K} = -e_1\nabla\varphi = e_1 \cdot \mathfrak{E},$$

als Kraft auf den Probekörper, die mit (116) vollkommen übereinstimmt.

Ist das Kügelchen nicht klein genug, so kommt die Ungleichförmigkeit des Feldes in Betracht; sie verändert die Kraft, wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden.

§ 43. Eine dielektrische oder leitende Kugel im ungleichförmigen Felde.

Im allgemeinen kann man sagen, daß auf jeden im elektrischen Felde befindlichen Körper eine Kraft wirkt, sei er nun mit wahrer Ladung behaftet oder nicht. Hat man es etwa mit dem Felde $\mathfrak{E}_0$ geladener Leiter in einem Dielektrikum von der Dielektrizitätskonstanten ε_0 zu tun, in welches ein Isolator von anderer Dielektrizitätskonstante ε gebracht wird, so wird dieser Isolator von Kräften angegriffen, wenigstens dann, wenn das Feld nicht streng gleichförmig ist. Um dieses zu zeigen, berechnen wir den Energiezuwachs $U - U_0$, den das Hereinbringen eines dielektrischen Körpers in das Feld zur Folge hat, wobei wir, ganz wie im § 39, voraussetzen, daß der dielektrische Körper keinen merklichen Einfluß auf die Verteilung wahrer Elektrizität ausübt, welche das Feld $\mathfrak{E}_0$ erzeugte. In diesem Falle ist die Energie U_0 des ursprünglichen Feldes von der Lage des Körpers unabhängig, und es kann die bei einer virtuellen Verrückung des Isolators geleistete Arbeit aus der Abnahme von

$$U - U_0 = \frac{1}{8\pi}\int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) - \frac{1}{8\pi}\int dv(\mathfrak{E}_0\mathfrak{D}_0)$$

berechnet werden. Dieser Ausdruck gibt die Differenz der elektrischen Energien zweier Systeme an, welche der gleichen Verteilung wahrer Elektrizität, aber verschiedenen Dielektrizitätskonstanten ε bzw. ε_0 entsprechen.

Wir wollen, die ursprüngliche Problemstellung etwas verallgemeinernd, ε und ε_0 als beliebige Funktionen des Ortes ansehen. Es gilt identisch

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) - (\mathfrak{E}_0\mathfrak{D}_0) = (\mathfrak{E}, \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0) + (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0, \mathfrak{D}_0).$$

Nun entsprechen die elektrischen Verschiebungen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_0$ der gleichen räumlichen oder flächenhaften Verteilung wahrer Ladung.

Mithin ist $\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0$ durchweg quellenfrei. Ferner ist $\mathfrak{E}$, die elektrostatische Feldstärke, durchweg wirbelfrei.

Wir hatten in der allgemeinen Theorie der Vektorfelder (§ 23) den Satz bewiesen: „Das über den ganzen Raum erstreckte Integral des inneren Produktes aus einem quellenfreien und einem wirbelfreien Vektor ist Null.“ Demnach verschwindet das Raumintegral des inneren Produktes

$$(\mathfrak{E}, \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0),$$

und es wird $$U - U_0 = \frac{1}{8\pi}\int dv(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0, \mathfrak{D}_0).$$

Aus dem soeben benutzten Satze folgt ferner, da auch $\mathfrak{E}_0$ wirbelfrei ist:

$$0 = \frac{1}{8\pi}\int dv(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0).$$

Nun hat man aber

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0, \mathfrak{D}_0) - (\mathfrak{E}_0, \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0) = \mathfrak{E}\mathfrak{D}_0 - \mathfrak{E}_0\mathfrak{D} = (\varepsilon_0 - \varepsilon)\mathfrak{E}_0\mathfrak{E}.$$

Es folgt also durch Subtraktion des letzten Integrales

$$U - U_0 = -\frac{1}{8\pi}\int dv(\varepsilon - \varepsilon_0)\mathfrak{E}_0\mathfrak{E}. \tag{141}$$

Dieses ist der Zuwachs, den die Energie des elektrostatischen Feldes erfährt, wenn bei festgehaltener Verteilung der wahren Ladungen die Dielektrizitätskonstante von ε_0 bis ε wächst; $\varepsilon - \varepsilon_0$ ist dabei im allgemeinen eine Ortsfunktion.

Wir kehren nun zu dem im Eingange dieses Paragraphen gestellten Probleme zurück und wollen insbesondere annehmen, daß das ursprüngliche Feld im leeren Raume herrschte, d. h. $\varepsilon_0 = 1$ war. In dieses wird nun ein homogener Körper gebracht; dann ist $\varepsilon - \varepsilon_0$ nur in dem von dem Körper eingenommenen Raume von Null verschieden, und zwar gleich $\varepsilon - 1$. Da ferner die Polarisation, welche der Körper annimmt, ist

$$\mathfrak{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathfrak{E},$$

so folgt aus (141) für diesen Fall

$$U - U_0 = -\frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{E}_0\mathfrak{P}). \tag{141a}$$

Die Funktion, deren Abnahme die bei einer Verrükkung des Dielektrikums von den Kräften des Feldes geleistete Arbeit angibt, ist gleich einem über das Dielektrikum erstreckten Integrale; der Integrand ist, bis auf den Faktor $(-\frac{1}{2})$, gleich dem inneren Produkte aus der Feldstärke $\mathfrak{E}_0$, die vor dem Hereinbringen des Dielektrikums bestand, und der Polarisation $\mathfrak{P}$, welche das Dielektrikum annimmt.

Wir wenden das Ergebnis auf eine dielektrische Kugel an, deren im Felde $\mathfrak{E}_0$ angenommene Polarisation durch (137) bestimmt ist. Es wird für diese

$$(141\text{b}) \qquad U - U_0 = -\frac{3}{8\pi} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \int\limits^{i} dv\, \mathfrak{E}_0^{\,2} = -\frac{a^3}{2} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \mathfrak{E}_0^{\,2}.$$

Obwohl bei der Berechnung der Polarisation der Kugel im § 39 das Feld als gleichförmig vorausgesetzt wurde, können wir doch jetzt die Kraft bestimmen, welche auf die Kugel wirkt, wenn das ursprüngliche Feld $\mathfrak{E}_0$ nicht vollkommen gleichförmig war. Denn in diesem Falle stellt (141 b) eine erste Annäherung für den Energiezuwachs dar, welchen das elektrische Feld durch Hereinbringen der dielektrischen Kugel erfährt; derselbe ist negativ. Es nimmt also die Feldenergie beim Hereinbringen der Kugel ab, und zwar um so mehr, je größer die ursprüngliche Feldstärke war. Es ergibt sich als Näherungswert für die mechanische Kraft

$$(142) \qquad \mathfrak{K} = -\nabla(U - U_0) = \frac{a^3}{2} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \nabla \mathfrak{E}_0^{\,2}.$$

Die im inhomogenen Felde wirkende Kraft sucht die dielektrische Kugel nach Stellen größerer Feldstärke hinzutreiben; denn hier wird die Feldenergie durch die Anwesenheit der Kugel stärker verkleinert. Von der Richtung der Feldstärke ist diese Kraft unabhängig.

Wir erwähnten am Schlusse des § 39, daß im Grenzfalle $\varepsilon = \infty$ die Feldstärke $\mathfrak{E}$ im Innern der Kugel verschwindet. Es bleibt zwar in diesem Falle nach (137 b) die elektrische Verschiebung im Innern der Kugel endlich, aber die elektrische Energie im Innern der Kugel ist Null. Außerhalb der Kugel aber stimmt

das Feld mit dem einer vollkommen leitenden Kugel von gleichem Volumen überein, da das Potential auf der Kugeloberfläche konstant ist. Folglich stimmt auch die Änderung, welche die Feldenergie durch die Anwesenheit einer leitenden Kugel erfährt, überein mit der Änderung der Feldenergie durch eine dielektrische Kugel vom gleichen Radius a und von unendlicher Dielektrizitätskonstante. Die Feldenergie nimmt beim Hereinbringen der leitenden Kugel um $\frac{a^3}{2}\mathfrak{E}_0^2$ ab; hieraus ergibt sich

$$\mathfrak{K} = \frac{a^3}{2}\nabla\mathfrak{E}_0^2 \tag{142a}$$

als angenäherter Ausdruck der Kraft, die auf eine ungeladene leitende Kugel im ungleichförmigen Felde wirkt.

Wir haben im vorigen Paragraphen die Kraft, die auf ein geladenes, mit Goldblatt überzogenes Holundermarkkügelchen wirkt, berechnet, ohne auf die Ungleichförmigkeit des Feldes Rücksicht zu nehmen. Ziehen wir diese in Rechnung, so wird

$$\mathfrak{K} = e\mathfrak{E}_0 + \frac{a^3}{2}\nabla\mathfrak{E}_0^2 \tag{142b}$$

die gesamte Kraft sein. Man kann also, indem man den Radius a des Probekügelchens hinreichend klein wählt, es stets erreichen, daß das geladene Probekügelchen auch in ungleichförmigen Feldern die Feldstärke anzeigt, die vor seiner Anwesenheit an der betreffenden Stelle des Feldes herrschte.

§ 44. Die mechanischen Kräfte im elektrostatischen Felde.

Die beiden letzten Paragraphen haben gezeigt, daß das in § 42 zugrunde gelegte Prinzip — die Berechnung der mechanischen Arbeit aus der Abnahme der elektrostatischen Feldenergie bei einer virtuellen Verrückung — zu Werten der bewegenden Kraft führt, die in den betrachteten Fällen von der Erfahrung bestätigt werden.

Von eben diesem Prinzipe ausgehend, soll nunmehr ein allgemeiner Ausdruck für die mechanische Kraft abgeleitet werden, welche das elektrostatische Feld auf die Stücke eines Isolators

ausübt. Um so die virtuelle Arbeit dieser Kraft berechnen zu können, muß man die Änderung kennen, welche die elektrostatische Energie erfährt, wenn die Teilchen der Körper gegebene Verrückungen ausführen.

Bei einer solchen unendlich kleinen Verschiebung $\mathfrak{q}$ wird sich erstens die Verteilung der Elektrizität ändern, insofern als man diese als an der Materie haftend betrachtet; nehmen wir an, was für die Rechnung bequem ist, daß die Verteilung der Elektrizität eine räumliche sei, von der Dichte ϱ (flächenhafte Verteilungen sind dann als Grenzfall räumlicher zu behandeln). Dann ist $\varrho \mathfrak{q}_n df$ die Elektrizitätsmenge, welche durch das feste Flächenstück df im Sinne der Normalen n bei der Verrückung $\mathfrak{q}$ hindurchtritt. Es geht also dem von einer geschlossenen Fläche f begrenzten Bereiche die Elektrizitätsmenge verloren

$$\int \varrho \mathfrak{q}_n df = \int dv \operatorname{div} \varrho \mathfrak{q} .$$

Der Übergang zu unendlich kleinen Raumteilen ergibt für die infolge der Verrückung $\mathfrak{q}$ stattfindende „lokale" Abnahme der Dichte der wahren Elektrizität:

$$-\delta \varrho = \operatorname{div} \varrho \mathfrak{q} . \tag{143}$$

Zweitens wird sich bei der Verschiebung der Körper im allgemeinen der Wert der Dielektrizitätskonstanten ε ändern. Wir wollen von denjenigen Änderungen dieser Konstanten absehen, welche durch Dichteänderungen, oder allgemeiner durch Formänderungen der Körper bedingt sind, und annehmen, daß für einen jeden materiellen Punkt des Isolators ε konstant sei. Das heißt, es soll die „substanzielle Änderung" von ε gleich Null sein; diese setzt sich aber, wie bekannt, additiv zusammen aus der „lokalen" Änderung $\delta \varepsilon$ an der betreffenden Stelle und der durch die Verrückung des materiellen Punktes an eine andere Stelle bedingten; die letztere ist gleich dem Betrage der Verrückung $\mathfrak{q}$ multipliziert mit der in Richtung von $\mathfrak{q}$ genommenen Komponente des Gradienten von ε, d. h. gleich dem skalaren Produkte von $\mathfrak{q}$ und dem Gradienten von ε; man hat also

$$\delta \varepsilon + (\mathfrak{q} \nabla \varepsilon) = 0 ,$$

und somit für die lokale Änderung von ε

$$\delta\varepsilon = -(\mathfrak{q}\nabla\varepsilon). \tag{143a}$$

Wenn man nun irgendwie die Körperstücke ein wenig verschiebt, indem man die Elektrizität und den Wert der Dielektrizitätskonstanten als an ihnen haftend betrachtet, so wird die elektrostatische Energie einen kleinen Zuwachs erfahren; dieser setzt sich additiv aus den Zuwächsen zusammen, welche der Veränderung der Ladungsverteilung ϱ bei konstantem ε, und der Veränderung von ε bei konstantem ϱ entsprechen; bezeichnen wir diese mit $\delta_\varrho U$, $\delta_\varepsilon U$, so gilt

$$\delta U = \delta_\varrho U + \delta_\varepsilon U. \tag{144}$$

Der Zustand, zu dem man so gelangt, ist allerdings kein elektrischer Gleichgewichtszustand; denn es werden im allgemeinen nach der Verrückung die besonderen Bedingungen der Elektrostatik nicht mehr erfüllt sein. Man muß also, um zu dem neuen, der veränderten Lage der Körper entsprechenden elektrostatischen Felde zu gelangen, noch eine dritte Veränderung des Feldes hinzufügen. Nun findet aber bei einer Veränderung von dieser letzteren Art keine Änderung der elektrischen Energie statt (vgl. §42), weil man in der Nachbarschaft eines Gleichgewichtszustandes bleibt, der nach dem Satze von Thomson einem Mindestwert der elektrischen Energie entspricht. Es gibt also (144) den gesamten Zuwachs der elektrostatischen Energie an, der den Übergang von dem ursprünglichen zu dem neuen, der veränderten Lage der Körper entsprechenden, elektrischen Gleichgewichte begleitet. Demnach ergibt sich, auf Grund des eingangs erwähnten Prinzips, die Arbeit der mechanischen Kräfte des Feldes bei der Verrückung

$$\delta A = -\delta U = -\{\delta_\varrho U + \delta_\varepsilon U\}. \tag{144a}$$

Wir berechnen $\delta_\varrho U$ und $\delta_\varepsilon U$ einzeln.

$\delta_\varrho U$ ist der Energieunterschied zweier Felder, in denen ε an der gleichen Stelle den gleichen Wert, ϱ aber verschiedene Werte hat. Schreibt man diese Differenz

$$U - U_0 = \frac{1}{8\pi}\int dv\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) - (\mathfrak{E}_0\mathfrak{D}_0)\}$$

so gilt, da
$$\varepsilon = \varepsilon_0,$$
$$\mathfrak{E}_0 \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}_0 \mathfrak{E} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}_0 \mathfrak{E} = \mathfrak{E} \mathfrak{D}_0,$$
und somit
$$0 = \frac{1}{8\pi} \int dv \{(\mathfrak{E}_0 \mathfrak{D}) - (\mathfrak{E} \mathfrak{D}_0)\}.$$
Man hat daher
$$U - U_0 = \frac{1}{8\pi} \int dv (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_0, \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0)$$
und, zu dem hier in Betracht kommenden Falle einer unendlich kleinen Änderung übergehend,
$$\delta_\varrho U = \frac{1}{4\pi} \int dv (\mathfrak{E}, \delta \mathfrak{D}). \tag{144b}$$

Hier geht nun die Veränderung $\delta \mathfrak{D}$ des Vektors der elektrischen Verschiebung ein. Diese hat lediglich der Bedingung zu genügen, daß sie der Veränderung der Ladungsverteilung bei der Verrückung entsprechen muß, derart, daß stets die Beziehung gilt
$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\varrho.$$
D. h. es muß sein
$$\operatorname{div} \delta\mathfrak{D} = 4\pi\delta\varrho,$$
und daher nach (143)
$$\operatorname{div} \delta\mathfrak{D} = -4\pi \operatorname{div} \varrho\mathfrak{q}.$$
Dieser Bedingung genügt der Wert von $\delta\mathfrak{D}$
$$\delta\mathfrak{D} = -4\pi\varrho\mathfrak{q},$$
durch dessen Einführung (144b) übergeht in
$$\delta_\varrho U = -\int dv (\mathfrak{E}, \varrho\mathfrak{q}) = -\int dv (\mathfrak{q}, \varrho\mathfrak{E}). \tag{144c}$$

Die Wahl von $\delta\mathfrak{D}$, die wir getroffen haben, war eine willkürliche; in der Tat ist $\mathfrak{D}$ durch die Ladungsverteilung allein nicht bestimmt. Diese Willkür beeinträchtigt indessen die Allgemeinheit des Beweises nicht; man muß ja, um zu dem neuen Gleichgewichtszustande zu gelangen, in jedem Falle noch eine Änderung des Feldes vornehmen, die jedoch, wie erwähnt, von keiner Energieänderung begleitet ist. Man würde also denselben Wert der Energieänderung erhalten, wenn man für die Veränderung des Vektors $\mathfrak{D}$ einen anderen, mit der Beziehung zwischen $\mathfrak{D}$ und ϱ verträglichen Ausdruck setzen würde. Mithin würde, wenn

$\delta\varepsilon$ gleich Null wäre, (144c) die gesamte Änderung der elektrostatischen Energie darstellen.

Hierzu kommt jedoch im allgemeinen noch die mit $\delta_\varepsilon U$ bezeichnete Energieänderung, die eine Veränderung der Dielektrizitätskonstante bei festgehaltener Ladungsverteilung begleitet. Zu ihrer Berechnung können wir die Formel (141) des § 43 verwenden, die sich eben auf diesen Fall bezieht:

$$U - U_0 = -\frac{1}{8\pi}\int dv (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathfrak{E}\mathfrak{E}_0 .$$

Dieselbe ergibt für die unendlich kleine Änderung

$$\delta_\varepsilon U = -\frac{1}{8\pi}\int dv\, \mathfrak{E}^2 \delta\varepsilon ,$$

und, gemäß (143a),

(144d) $$\delta_\varepsilon U = \frac{1}{8\pi}\int dv\, \mathfrak{E}^2 (\mathfrak{q}, \nabla\varepsilon).$$

Aus (144a, c, d) folgt schließlich für die Arbeit, welche die mechanischen Kräfte des elektrostatischen Feldes bei einer unendlich kleinen Verrückung der Körper leisten:

(144e) $$\delta A = \int dv \left(\mathfrak{q},\, \varrho\mathfrak{E} - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2 \nabla\varepsilon\right).$$

Zu demselben Ausdruck für die Arbeit gelangt man, wenn man an jedem einzelnen Stücke der Körper eine Kraft ergreifen läßt, die, auf die Volumeneinheit bezogen, den Wert hat

(145) $$\mathfrak{f}^e = \varrho\mathfrak{E} - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2 \nabla\varepsilon .$$

In diesem Kraftausdrucke zeigt das erste Glied die Kraft an, welche das Feld auf die wahre Ladung ausübt. Hierzu tritt das zweite Glied, welches überall dort in Betracht kommt, wo ε sich mit dem Orte ändert; es ist dem Quadrate der Feldstärke und dem Gefälle von ε proportional.

Aus dem Werte (144e) für die Arbeit kann der Ausdruck (145) für die Kraft auf die Volumeneinheit nur gewonnen werden, indem man sich vorstellt, daß jedes Körperstück unabhängig von den übrigen verschoben werden kann. Im allgemeinen sind nun die einzelnen Stücke nicht unabhängig voneinander beweglich;

es lassen sich dann aus (144e) nur so viele Kraftgrößen berechnen, als das System Freiheitsgrade besitzt. Handelt es sich z. B. um einen starren Körper von sechs Freiheitsgraden der Translation und Rotation, so ergeben sich die sechs Komponenten der resultierenden Kraft und der resultierenden Drehkraft des elektrostatischen Feldes aus (144e); die so berechneten Werte stimmen mit denen überein, die man erhält, wenn man an jedem Stück dv die Kraft $\mathfrak{k}^e dv$ angreifend denkt, und diese Einzelkräfte zur resultierenden Kraft und Drehkraft zusammensetzt. In diesem Sinne hat man den Kraftausdruck (145) zu deuten. Oder allgemeiner: wenn das System n kinematische Freiheitsgrade hat, so ergeben sich für die n verallgemeinerten Kraftkomponenten der Lagrangeschen Gleichungen aus (145) die richtigen Werte.

Übrigens haben wir hier von Unstetigkeitsflächen abgesehen. Kommen solche vor, so werden besondere Betrachtungen notwendig, die wir dem folgenden Paragraphen vorbehalten.

§ 45. Die Maxwellschen Spannungen.

Wir denken uns jetzt im elektrostatischen Felde durch eine geschlossene Fläche f ein Gebiet abgetrennt. Auf dieses Gebiet wirkt, wie im vorigen Paragraphen bewiesen wurde, die Gesamtkraft

(145a) $$\mathfrak{K}^e = \int dv \left\{ \varrho \mathfrak{E} - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \nabla \varepsilon \right\}.$$

Hierfür kann auch geschrieben werden

(145b) $$8\pi \mathfrak{K}^e = \int dv \{ 2\mathfrak{E} \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} - \mathfrak{E}^2 \nabla \varepsilon \}.$$

Es soll nun gezeigt werden, daß sich diese Kraft durch die Resultierende eines Systems von Flächenkräften ersetzen läßt, die über die Begrenzungsfläche des Gebietes verteilt sind. Die mathematische Form dieser Betrachtung wird vereinfacht, wenn man sie, statt an die Kraft selbst, an die Arbeit anknüpft, welche die Kraft bei einer Parallelverschiebung $\mathfrak{q}$ des ganzen Gebietes leistet. Diese Arbeit beträgt

$$\delta A = \mathfrak{q} \mathfrak{K}^e;$$

so daß man hat

(145c) $$8\pi \delta A = \int dv \{ 2(\mathfrak{q}\mathfrak{E}) \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} - (\mathfrak{E}^2 \mathfrak{q}, \nabla \varepsilon) \}.$$

Dieser Ausdruck stimmt übrigens mit Gl. (144e) des vorigen Paragraphen überein, doch ist jetzt $\mathfrak{q}$ ein konstanter Vektor.

Um die Umrechnung des hier auftretenden Raumintegrales in ein Flächenintegral auszuführen, knüpfen wir an die Formel (65) an:

$$\operatorname{div} \psi\mathfrak{A} = \psi \operatorname{div} \mathfrak{A} + \mathfrak{A}\nabla\psi;$$

wir setzen hier zuerst

$$\psi = 2(\mathfrak{q}\mathfrak{E}), \qquad \mathfrak{A} = \varepsilon\mathfrak{E}, \qquad \text{und erhalten}$$

$$(145\text{d}) \quad 2(\mathfrak{q}\mathfrak{E}) \operatorname{div} \varepsilon\mathfrak{E} = \operatorname{div}\{2(\mathfrak{q}\mathfrak{E})\varepsilon\mathfrak{E}\} - 2\varepsilon\mathfrak{E}\nabla(\mathfrak{q}\mathfrak{E});$$

sodann setzen wir $\psi = \varepsilon, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{E}^2\mathfrak{q}$: dann folgt

$$(145\text{e}) \qquad (\mathfrak{E}^2\mathfrak{q}, \nabla\varepsilon) = \operatorname{div}\{\varepsilon\mathfrak{E}^2\mathfrak{q}\} - \varepsilon \operatorname{div} \mathfrak{E}^2\mathfrak{q}.$$

Durch Subtraktion von (145d) und (145e) ergibt sich die Identität

$$(146) \quad \begin{aligned} 2(\mathfrak{q}\mathfrak{E}) \operatorname{div} \varepsilon\mathfrak{E} - (\mathfrak{E}^2\mathfrak{q}, \nabla\varepsilon) &= \operatorname{div}\{2(\mathfrak{q}\mathfrak{E})\varepsilon\mathfrak{E} - \varepsilon\mathfrak{E}^2\mathfrak{q}\} \\ &+ \varepsilon\{\operatorname{div} \mathfrak{E}^2\mathfrak{q} - 2\mathfrak{E}\nabla(\mathfrak{q}\mathfrak{E})\}. \end{aligned}$$

Das letzte Glied der rechten Seite mag umgerechnet werden. Man hat, da $\mathfrak{q}$ konstant ist,

$$(146\text{a}) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{E}^2\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}, \nabla\mathfrak{E}^2),$$

und ferner nach Formel (115)

$$\nabla(\mathfrak{q}\mathfrak{E}) = (\mathfrak{q}\nabla)\mathfrak{E} + [\mathfrak{q} \operatorname{curl} \mathfrak{E}],$$

somit $\quad 2\mathfrak{E}\nabla(\mathfrak{q}\mathfrak{E}) = (2\mathfrak{E}, (\mathfrak{q}\nabla)\mathfrak{E}) + 2\mathfrak{E}[\mathfrak{q} \operatorname{curl} \mathfrak{E}].$

Da weiter gilt $\quad (2\mathfrak{E}, (\mathfrak{q}\nabla)\mathfrak{E}) = (\mathfrak{q}\nabla)\mathfrak{E}^2,$

und $\quad 2\mathfrak{E}[\mathfrak{q} \operatorname{curl} \mathfrak{E}] = -2\mathfrak{q}[\mathfrak{E} \operatorname{curl} \mathfrak{E}],$ so wird

$$(146\text{b}) \qquad 2\mathfrak{E}\nabla(\mathfrak{q}\mathfrak{E}) = (\mathfrak{q}\nabla)\mathfrak{E}^2 - 2\mathfrak{q}[\mathfrak{E} \operatorname{curl} \mathfrak{E}].$$

Durch Subtraktion von (146a) und (146b) folgt für das letzte Glied in (146):

$$(146\text{c}) \qquad \varepsilon\{\operatorname{div} \mathfrak{E}^2\mathfrak{q} - 2\mathfrak{E}\nabla(\mathfrak{q}\mathfrak{E})\} = 2\mathfrak{q}[\varepsilon\mathfrak{E} \operatorname{curl} \mathfrak{E}].$$

Dieses Glied werde nun in (146) nach links gesetzt, und (146) werde über das Gebiet v integriert. Dann ist nach (146) das Raumintegral

$$(146\text{d}) \quad \int dv\{2(\mathfrak{q}\mathfrak{E}) \operatorname{div} \varepsilon\mathfrak{E} - (\mathfrak{q}\mathfrak{E}^2, \nabla\varepsilon) - 2\mathfrak{q}[\varepsilon\mathfrak{E}, \operatorname{curl} \mathfrak{E}]\}$$

gleich dem Raumintegral der Divergenz des Vektors

$$2(\mathfrak{q}\mathfrak{E})\varepsilon\mathfrak{E} - \varepsilon\mathfrak{E}^2\mathfrak{q},$$

welches sich, nach dem Gaußschen Satze, in das Flächenintegral der normalen Komponente dieses Vektors umformen läßt:

$$(146e) \qquad \int df \{ 2(\mathfrak{q}\mathfrak{E})(\varepsilon\mathfrak{E}, \mathfrak{n}) - \varepsilon\mathfrak{E}^2(\mathfrak{q}\mathfrak{n}) \}.$$

Die Umrechnung des Raumintegrals (146 d) in das Flächenintegral (146 e) kann ohne weiteres dazu dienen, den Ausdruck (145 c) für die Arbeit bei einer Parallelverschiebung des Gebietes in dem wirbelfreien elektrostatischen Felde in Form eines Flächenintegrales zu schreiben. Doch soll mit Rücksicht auf spätere Anwendungen hervorgehoben werden, daß die Ausdrücke (146 d) und (146 e) einander gleich sind, welches auch die Bedeutung des Skalars ε und des Vektors $\mathfrak{E}$ sein möge. Dasselbe gilt von der Identität, zu der man durch Forthebung des konstanten Vektors $\mathfrak{q}$, der beiderseits lediglich als Faktor skalarer Produkte auftritt, gelangt:

$$(147) \int dv \{ 2\mathfrak{E}\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^2\nabla\varepsilon - 2[\varepsilon\mathfrak{E}, \operatorname{curl}\mathfrak{E}] \} = \int df \{ 2\mathfrak{E}(\varepsilon\mathfrak{E}, \mathfrak{n}) - \mathfrak{n}\varepsilon\mathfrak{E}^2 \}.$$

Diese Formel wird auch später, bei der Behandlung der mechanischen Kräfte magnetischer Felder, sich als nützlich erweisen.

Bei der Anwendung auf das elektrostatische Feld, um die es sich hier handelt, ist zu beachten, daß

$$\operatorname{curl}\mathfrak{E} = 0$$

ist. Mit Rücksicht hierauf wird die linke Seite von (147) gleich dem Ausdruck (145 b) für $8\pi\mathfrak{K}^e$. Man kann also $\mathfrak{K}^e$, die gesamte Kraft des elektrostatischen Feldes, als Flächenintegral schreiben:

$$(147a) \qquad \mathfrak{K}^e = \int df \mathfrak{T}^e,$$

wobei der Vektor $\mathfrak{T}^e$ die Bedeutung hat

$$(148) \qquad 8\pi\mathfrak{T}^e = 2\mathfrak{E}(\varepsilon\mathfrak{E}, \mathfrak{n}) - \mathfrak{n}\varepsilon\mathfrak{E}^2.$$

D. h. die Gesamtkraft des elektrostatischen Feldes läßt sich durch ein über die Begrenzungsfläche des Gebietes verteiltes System von Flächenkräften ersetzen; die Flächenkraft, bezogen auf die Flächeneinheit, wird durch (148) gegeben. Da, nach Formel (24), gilt

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{D}\mathfrak{n}) - \mathfrak{n}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) = [\mathfrak{D}[\mathfrak{E}\mathfrak{n}]],$$

so kann man (148) auch schreiben

$$(148a) \qquad 8\pi\mathfrak{T}^e = \mathfrak{E}(\mathfrak{D}\mathfrak{n}) + [\mathfrak{D}[\mathfrak{E}\mathfrak{n}]].$$

Wir wollen den Ausdruck (148) für die Flächenkraft erörtern. Wir betrachten zunächst ein Flächenstück, das senkrecht zur Richtung des Vektors $\mathfrak{E}$ gestellt ist. Für ein solches ist

$$\mathfrak{T}^e = \mathfrak{n} \cdot \frac{\varepsilon\mathfrak{E}^2}{8\pi},$$

die Flächenkraft hat somit die Richtung der äußeren Normale, sie entspricht einer Zugkraft, deren Betrag gleich der elektrischen Energiedichte ist.

Wir fassen zweitens ein Flächenstück ins Auge, welches parallel zum Vektor $\mathfrak{E}$ gestellt ist; da hier $\mathfrak{n}$ senkrecht zu $\mathfrak{E}$ ist, so ergibt (148)

$$\mathfrak{T}^e = -\mathfrak{n} \cdot \frac{\varepsilon\mathfrak{E}^2}{8\pi};$$

auch hier ist also die Flächenkraft dem Betrage nach der Energiedichte gleich, sie ist aber der äußeren Normale des Gebietes, auf welches sie wirkt, entgegengerichtet, d. h. sie entspricht einer Druckkraft.

Die Flächenkraft (148) ist zu deuten als Zug parallel den elektrischen Kraftlinien, als Druck senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien; der Betrag beider ist gleich der elektrischen Energiedichte an der betreffenden Stelle.

Bereits Faraday hatte die mechanischen Kräfte des elektrischen Feldes als Längszug und Querdruck der elektrischen Kraftlinien zu veranschaulichen gesucht; Maxwell hat diese Auffassung schärfer begründet und gezeigt, daß sie in der Tat die bekannten, auf Körper im elektrostatischen Felde wirksamen Kräfte ergibt. Wir gelangen zu der auf ein rechtwinkliges Achsensystem bezogenen analytischen Darstellung der Maxwellschen Spannungen, indem wir die Beziehung (148), die zwischen den Vektoren $\mathfrak{T}^e$ und $\mathfrak{n}$ besteht, in der Form einer linearen Vektorfunktion schreiben (vgl. § 9):

$$(149) \qquad \begin{cases} \mathfrak{T}_x^e = T_{xx}^e\mathfrak{n}_x + T_{xy}^e\mathfrak{n}_y + T_{xz}^e\mathfrak{n}_z, \\ \mathfrak{T}_y^e = T_{yx}^e\mathfrak{n}_x + T_{yy}^e\mathfrak{n}_y + T_{yz}^e\mathfrak{n}_z, \\ \mathfrak{T}_z^e = T_{zx}^e\mathfrak{n}_x + T_{zy}^e\mathfrak{n}_y + T_{zz}^e\mathfrak{n}_z; \end{cases}$$

dabei finden sich für die Koeffizienten die Werte:

$$\text{(149a)} \qquad \begin{cases} 8\pi T^e_{xx} = \varepsilon(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2), \\ 8\pi T^e_{yy} = \varepsilon(\mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2 - \mathfrak{E}_x^2), \\ 8\pi T^e_{zz} = \varepsilon(\mathfrak{E}_z^2 - \mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2); \end{cases}$$

$$\text{(149b)} \qquad \begin{cases} 8\pi T^e_{xy} = 8\pi T^e_{yx} = 2\varepsilon \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y, \\ 8\pi T^e_{yz} = 8\pi T^e_{zy} = 2\varepsilon \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z, \\ 8\pi T^e_{zx} = 8\pi T^e_{xz} = 2\varepsilon \mathfrak{E}_z \mathfrak{E}_x. \end{cases}$$

Aus (149b) geht hervor, daß die lineare Vektorfunktion (149) eine symmetrische ist; ihre sechs Koeffizienten stellen sich als ein System von Tensorkomponenten dar; dieses sind die sogenannten „Maxwellschen Spannungen" im elektrischen Felde.

Es springt die Analogie zu den elastischen Spannungen in die Augen (§ 9 Gl. (50), (51)). Insbesondere werden von den Maxwellschen Spannungen die Symmetriebedingungen (51) erfüllt. Doch darf man nicht annehmen, daß die Maxwellschen Spannungen etwa mit den elastischen Spannungen übereinstimmen, welche in den im elektrischen Felde befindlichen Körpern bestehen. Diese Spannungen sind vielmehr von den Maxwellschen durchaus verschieden; für Flüssigkeiten und Gase, bei denen die elastischen Spannungen sich auf einen allseitigen Druck reduzieren, ist dies ja ohne weiteres klar.

Aus der Betrachtung, die uns zu der Flächenkraft $\mathfrak{T}^e$ geführt hat, geht hervor, daß diese Flächenkraft, und damit die Maxwellschen Spannungen, nur ein Hilfmittel sind, dessen man sich zur Ermittelung der mechanischen Kräfte bedienen kann. Die gesamte Kraft auf ein beliebiges Gebiet wird erhalten, indem man die Flächenkraft $\mathfrak{T}^e$ über dessen Grenzfläche integriert. Hat man so die Kräfte für die einzelnen Raum- und Flächenstücke ermittelt, so hat man diese in die Gleichgewichtsbedingungen der Elastizitätstheorie einzusetzen, um die wirklichen elastischen Spannungen zu erhalten; mit dieser Aufgabe beschäftigt sich die Theorie der Elektrostriktion. Die Spannungen (149a, b) werden vielfach, um den Gegensatz zu den wirklichen Spannungen hervorzuheben, als „fiktive Spannungen" bezeichnet.

Würde man aus den fiktiven Spannungen die Kraft pro Volumeinheit berechnen, so würde man zu Gl. (145) des vorigen Paragraphen zurückgelangen. Dort mußten Unstetigkeitsflächen, an denen die Feldstärke oder die Dielektrizitätskonstante einen Sprung machen, ausgeschlossen werden. Mit Hilfe der fiktiven Flächenkräfte $\mathfrak{T}^e$ können wir nun unschwer die wirkliche Flächenkraft berechnen, die an solchen Unstetigkeitsflächen angreift.

Wir denken uns zu diesem Zwecke ein Stück der Unstetigkeitsfläche zwischen zwei, diesseits und jenseits gelegene Flächenstücke eingeschlossen, deren Abstand dem Grenzwerte Null zustrebt. Für diese Flächenstücke sind die auf die Flächeneinheit bezogenen, fingierten Flächenkräfte $\mathfrak{T}_1^e, \mathfrak{T}_2^e$ einzuführen, zu deren Berechnung wir uns der Gl. (148a) bedienen:

$$8\pi\mathfrak{T}_1^e = \mathfrak{E}_1(\mathfrak{D}_1\mathfrak{n}_1) + [\mathfrak{D}_1[\mathfrak{E}_1\mathfrak{n}_1]],$$

$$8\pi\mathfrak{T}_2^e = \mathfrak{E}_2(\mathfrak{D}_2\mathfrak{n}_2) + [\mathfrak{D}_2[\mathfrak{E}_2\mathfrak{n}_2]];$$

dabei bedeuten $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2$ jedesmal die äußere Normale des begrenzten Gebietes, also hier der dünnen, die Unstetigkeitsfläche enthaltenden Schicht, d. h. die Normale, die von der Unstetigkeitsfläche aus nach dem Innern des Körpers gezogen ist, der durch die Ziffer 1 oder 2 gekennzeichnet ist. Die Summe der beiden Flächenkräfte $\mathfrak{T}_1^e$ und $\mathfrak{T}_2^e$ gibt die Kraft auf die Flächeneinheit der Unstetigkeitsfläche an, da im Grenzfalle die hinzutretende Kraft auf die Mantelfläche verschwindet, die mit jenen beiden Flächenstücken zusammen das Stück der Unstetigkeitsfläche ganz einschließt. Setzen wir $\mathfrak{n}_1 = -\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}$,

so wird die auf die Einheit der Unstetigkeitsfläche wirkende Kraft:

$$(150)\quad 8\pi\{\mathfrak{T}_1^e+\mathfrak{T}_2^e\} = \mathfrak{E}_1(\mathfrak{D}_1\mathfrak{n}) - \mathfrak{E}_2(\mathfrak{D}_2\mathfrak{n}) + [\mathfrak{D}_1[\mathfrak{E}_1\mathfrak{n}]] - [\mathfrak{D}_2[\mathfrak{E}_2\mathfrak{n}]].$$

An der Oberfläche eines Leiters verschwindet die auf das Leiterinnere bezügliche fingierte Flächenkraft $\mathfrak{T}_2^e$, da im Leiter kein Feld besteht, und es bleibt nur $\mathfrak{T}_1^e$, die auf das Äußere bezügliche fingierte Flächenkraft, übrig, die demnach in diesem besonderen Falle die wirkliche Flächenkraft darstellt; sie ist, da die Kraftlinien senkrecht zur Leiteroberfläche stehen, eine Zugkraft, deren Betrag der Dichte der Energie gleich ist.

An der ungeladenen Trennungsfläche zweier Isolatoren ist die Normalkomponente von $\mathfrak{D}$ stetig, mithin

$$\mathfrak{E}_1(\mathfrak{D}_1\mathfrak{n}) - \mathfrak{E}_2(\mathfrak{D}_2\mathfrak{n}) = \{\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2\}(\mathfrak{D}_1\mathfrak{n});$$

da ferner die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ stetig sind, so ist die Differenz von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ ein zur Trennungsfläche senkrechter Vektor:

$$\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{n}\{(\mathfrak{E}_1\mathfrak{n}) - (\mathfrak{E}_2\mathfrak{n})\} = \mathfrak{n}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)(\mathfrak{D}_1\mathfrak{n});$$

man hat also

$$\mathfrak{E}_1(\mathfrak{D}_1\mathfrak{n}) - \mathfrak{E}_2(\mathfrak{D}_2\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)(\mathfrak{D}_1\mathfrak{n})^2.$$

Andererseits hat man, da das äußere Produkt von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{n}$ stetig ist,

$$[\mathfrak{D}_1[\mathfrak{E}_1\mathfrak{n}]] - [\mathfrak{D}_2[\mathfrak{E}_2\mathfrak{n}]] = [\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2,\ [\mathfrak{E}_1\mathfrak{n}]],$$

wobei die vektorielle Differenz von $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ auf $\mathfrak{n}$ senkrecht steht; es ist also

$$(\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2,\ \mathfrak{n}) = 0, \qquad \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2 = [\mathfrak{n}[\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2,\ \mathfrak{n}]],$$

und daher ist in

$$[\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2,\ [\mathfrak{E}_1\mathfrak{n}]] = -\mathfrak{n}(\mathfrak{E}_1,\ \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) \qquad \text{zu setzen}$$

$$(\mathfrak{E}_1,\ \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{E}_1[\mathfrak{n}[\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2,\ \mathfrak{n}]] = [\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2,\ \mathfrak{n}]\cdot[\mathfrak{E}_1\mathfrak{n}]$$
$$= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)[\mathfrak{E}_1\mathfrak{n}]^2, \qquad \text{mithin}$$

$$[\mathfrak{D}_1[\mathfrak{E}_1\mathfrak{n}]] - [\mathfrak{D}_2[\mathfrak{E}_2\mathfrak{n}]] = -\mathfrak{n}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)[\mathfrak{E}_1\mathfrak{n}]^2.$$

Es ergibt sich also schließlich aus (150) als Ausdruck für die wirkliche Flächenkraft, die an der Trennungsfläche zweier Isolatoren angreift:

$$(150\text{a}) \quad \mathfrak{T}_1^e + \mathfrak{T}_2^e = \frac{\mathfrak{n}}{8\pi}\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)(\mathfrak{D}_1\mathfrak{n})^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)[\mathfrak{E}_1\mathfrak{n}]^2\right\};$$

dieselbe ist senkrecht zur Fläche gerichtet. Da $\mathfrak{n}$ die von dem Körper (2) nach dem Körper (1) weisende Normale bedeutet, so hat die Kraft diese Richtung, falls $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ist, d. h. die Flächenkraft zieht die Trennungsfläche nach derjenigen Seite, auf welcher die Dielektrizitätskonstante den kleineren Wert hat. In (150a) ist diese Zugkraft durch die normale Komponente von $\mathfrak{D}$ und die tangentielle von $\mathfrak{E}$ ausgedrückt, welche diesseits und jenseits der Trennungsfläche die gleichen Werte haben. Bevorzugt man die erste Seite, so kann man auch schreiben

$$(150\text{b})\qquad \mathfrak{T}_1^e + \mathfrak{T}_2^e = \mathfrak{n}\cdot\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{8\pi}\left\{\mathfrak{E}_1^2 - \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(\mathfrak{E}_1\mathfrak{n})^2\right\}.$$

Bereits im vorigen Paragraphen, und daher auch in diesem, ist der Umstand außer Betracht geblieben, daß sich bei einer Deformation der Körper ihre Dielektrizitätskonstante ändert, z. B. daß sie bei Flüssigkeiten und bei Gasen von der Dichte abhängt. Bei Berücksichtigung dieses Umstandes sind zu den Ausdrücken der fiktiven Spannungen, und daher auch der räumlichen und der Flächenkräfte, Ergänzungsglieder hinzuzufügen; diese Ergänzungsspannungen sind von H. Hertz in allgemeinster Weise angegeben worden. Doch sind ihre Anteile an den mechanischen Kräften gering, und sie mögen daher hier unberücksichtigt bleiben.

Viertes Kapitel.

Der elektrische Strom.

§ 46. Die Gesetze von Ohm und Joule.

Bereits in § 41 wurde angedeutet, welche Eigenschaften des elektrischen Feldes die Maxwellsche Theorie als allgemein, auch für zeitlich veränderliche Felder, gültig ansieht, und welche Eigenschaften insbesondere die elektrostatischen Felder kennzeichnen. Allgemeingültig sind die Verknüpfungen zwischen der Feldstärke $\mathfrak{E}$, der Verschiebung $\mathfrak{D}$ und der elektrischen Energie U, sowie die zwischen Elektrizitätsmenge und elektrischer Verschiebung; dem elektrostatischen Felde eigentümlich hingegen ist es, daß $\mathfrak{E}$ sich aus einem einwertigen Potentiale ableitet, welches auf der Oberfläche der Leiter und in ihrem Innern konstant ist.

Wir denken uns jetzt zwei Leiter, welche mit entgegengesetzt gleichen Ladungen versehen sind, etwa die Belegungen eines Kondensators. Das elektrostatische Feld, welches sich hergestellt hat, stören wir dadurch, daß wir die beiden Belegungen durch einen metallischen Draht miteinander verbinden. Da die Enden des leitenden Drahtes dadurch auf verschiedene Potentiale φ_1, φ_2 gebracht werden, so kann im Innern desselben der Gradient von φ nicht durchweg gleich Null sein; es muß sich im Innern des

Leiters ein elektrisches Feld ausbilden, so daß die Bedingung des elektrostatischen Gleichgewichtes nicht mehr erfüllt ist.

Was geschieht jetzt? Man beobachtet, daß nach kurzer Zeit die Ladungen $\pm e$ der Kondensatorbelegungen sich geändert haben oder ganz verschwunden sind; man sagt dann: Ein elektrischer Strom hat den Leitungsdraht durchflossen, und nimmt die zeitliche Änderung der wahren elektrischen Ladung als Maß der Stromstärke:

$$J = \frac{de}{dt}. \tag{151}$$

Man findet, daß gleichzeitig im Drahte eine Wärmeentwicklung stattgefunden hat und daß einer benachbarten Magnetnadel ein Drehimpuls erteilt worden ist.

Auf die soeben erwähnte Verknüpfung des elektrischen Stromes mit dem magnetischen Felde werden wir erst im nächsten Abschnitte genauer eingehen. Zunächst handelt es sich darum, die Beziehungen festzustellen, welche zwischen dem elektrischen Felde und dem elektrischen Leitungsstrome sowie der Wärmeentwicklung bestehen; diese Beziehungen werden durch die Gesetze von Ohm und Joule formuliert.

Beide Gesetze sind allerdings nicht für den rasch verklingenden Strom der Kondensatorentladung zuerst gefunden worden, sondern für den stationären Strom, der in einem, an die Pole einer elektrischen Batterie angeschlossenen Drahte fließt; die beiden Merkmale des elektrischen Leitungsstromes, Wärmeentwicklung und magnetisches Feld, sind auch hier vorhanden. Eine zeitliche Änderung wahrer elektrischer Ladung allerdings wird durch den stationären, in einer geschlossenen Bahn fließenden Strom nicht bedingt. Dennoch berechtigen jene beiden Merkmale dazu, ihn als wesensgleich mit dem Entladungsstrome eines Kondensators anzusehen.

Wie allen zeitlich konstanten elektrischen Feldern, so kommt auch demjenigen des stationären Stromes die Eigenschaft zu, wirbelfrei zu sein und sich daher aus einem skalaren Potentiale φ abzuleiten. Wir denken uns einen Leitungsdraht aus homogenem Materiale; den Enden P_1, P_2 mögen die Potentiale φ_1 und φ_2 zukommen; dann besagt das Ohmsche Gesetz, wie es

in den elementaren Lehrbüchern der Physik formuliert wird: Die Potentialdifferenz zwischen den Enden der Leitung ist gleich dem Produkte aus Stromstärke und Widerstand

$$\varphi_1 - \varphi_2 = JR. \tag{152}$$

Dabei stellt $\varphi_1 - \varphi_2$ das Linienintegral der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ von P_1 bis P_2 vor, J ist die Stärke des Stromes, der durch die Querschnitte der Leitung von P_1 nach P_2 fließt, und R der Gesamtwiderstand des homogenen Leitungsdrahtes, welcher die beiden Punkte verbindet.

Das Ohmsche Gesetz ist eine reine Erfahrungstatsache; als solche läßt es sich wortgetreu nur durch das Integralgesetz (152) wiedergeben. Für die weitere theoretische Darstellung eignen sich aber weit besser als die Integralgesetze die Differentialgesetze, die man erhält, wenn man jene auf unendlich kleine Gebietsteile überträgt. Diese geben das Naturgesetz in strengerer Fassung wieder, da bei unendlich kleinen Gebietsteilen eine Reihe möglicher Umstände vermieden wird, deren ausdrückliche Ausschließung bei Leitern von endlichen Abmessungen nicht in allen Fällen zulässig ist.

Wir führen an Stelle der Stromstärke J die Stromdichte des elektrischen Leitungsstromes ein, die wir mit $\mathfrak{i}$ bezeichnen. Verteilt sich die Strömung gleichförmig über den Draht, so ist der Betrag des der Leitlinie s parallelen Vektors $\mathfrak{i}$ einfach der Quotient aus Stromstärke und Querschnitt

$$\mathfrak{i}_s = |\mathfrak{i}| = \frac{J}{q}.$$

Für ein zylindrisches Stück eines homogenen Leiters von der Länge l, in welchem sich ein gleichförmiges, der Leitlinie paralleles elektrisches Feld hergestellt hat, ist ferner

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathfrak{E}_s l.$$

Setzt man weiter

$$R = \frac{l}{\sigma q},$$

wo dann σ eine Materialkonstante, die spezifische elektrische Leitfähigkeit, darstellt, so ergibt das Ohmsche Gesetz (152):

$$\mathfrak{i}_s = \sigma \mathfrak{E}_s.$$

Für isotrope Körper ist die Leitfähigkeit von der Richtung unabhängig. Hier gilt als differentielle Form des Ohmschen Gesetzes:

$$\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}. \tag{152a}$$

Das Ohmsche Gesetz besagt also, daß für einen isotropen Leiter die Stromdichte der elektrischen Feldstärke parallel ist, und daß der Quotient der Beträge der beiden Vektoren eine Stoffkonstante, mithin unabhängig von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{E}$ ist. Mit der chemischen und physikalischen Beschaffenheit des Leiters, insbesondere mit der Temperatur, wird sich natürlich auch die Leitfähigkeit σ ändern. Bei anisotropen, kristallinischen Leitern stimmen die Richtungen von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{E}$ im allgemeinen nicht überein; man stellt hier $\mathfrak{i}$ durch eine lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{E}$ dar; dies sei nur nebenbei bemerkt, da ein näheres Eingehen auf die Fragen der Kristallphysik aus dem Rahmen dieser Schrift heraustritt.

Ebenso wie das Ohmsche wird auch das Joulesche Gesetz durch die Erfahrung unmittelbar in Form eines Integralgesetzes gegeben: Die Wärmeentwicklung, die pro Zeiteinheit in der ganzen Leitung stattfindet, ist

$$Q = J(\varphi_1 - \varphi_2) = RJ^2; \tag{153}$$

sie ist natürlich in mechanischem Maße zu messen, da wir $\varphi_1 - \varphi_2$ und J in absoluten elektrostatischen Einheiten ausdrücken. Das zugehörige Differentialgesetz bezieht sich auf die pro Zeiteinheit und pro Volumeinheit entwickelte Wärme; diese beträgt

$$\mathfrak{i}\mathfrak{E} = \sigma \mathfrak{E}^2 = \frac{1}{\sigma}\mathfrak{i}^2. \tag{154}$$

Die Gesetze von Ohm und Joule, die von der Erfahrung zunächst nur für stationäre Ströme bestätigt sind, werden als auf die Leiterstückchen bezogene Differentialgesetze von der Maxwellschen Theorie auch auf beliebig rasch wechselnde Felder angewandt; für die gesamte im Felde entwickelte Joulesche Wärme wird stets gesetzt

$$Q = \int dv(\mathfrak{i}\mathfrak{E}) = \int dv \sigma \mathfrak{E}^2 = \int dv \frac{\mathfrak{i}^2}{\sigma}. \tag{154a}$$

Von den Differentialgesetzen (152a) und (154) gelangt man

leicht zu den Integralgesetzen zurück, auch wenn es sich um einen linearen Leiter von veränderlichem Querschnitt q handelt. Man nennt einen Leiter „linear", wenn die Querabmessungen so klein gegen die Längsabmessungen sind, daß der Strom sich gleichförmig über den Querschnitt verteilt und daß in jedem Querschnitt der Leitung ein konstanter Potentialwert φ besteht. Dann ist

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \mathfrak{E}_s = \frac{1}{\sigma}\mathfrak{i}_s = \frac{J}{\sigma q};$$

da nun durch alle Querschnitte der gleiche Strom fließt, so ergibt die Integration längs der Leitlinie, von P_1 bis P_2:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = J\int_1^2 \frac{ds}{\sigma q} = JR. \tag{155}$$

Wir finden also das Ohmsche Integralgesetz (152) wieder und, darüber hinaus, einen bestimmten Ausdruck für den Widerstand des linearen Leiters.

Was die Joulesche Wärme anbelangt, so ergibt sie sich nach (154a) durch Integration

$$Q = \int_1^2 ds\, q\, \frac{\mathfrak{i}_s^2}{\sigma} = J^2\int_1^2 \frac{ds}{\sigma q} = J^2 R, \tag{155a}$$

was mit (153) vollkommen übereinstimmt.

§ 47. Leitungsstrom und Verschiebungsstrom.

Für den stationären elektrischen Strom, der in einem ringförmigen Leiterkreise von irgendwelchen elektromotorischen Kräften erregt wird, gilt der allgemeine Grundsatz, daß durch alle Querschnitte des Kreises der gleiche Gesamtstrom fließt. Sollte überhaupt irgendwo Elektrizität entstehen, so entsteht doch immer positive und negative Elektrizität in gleichen Mengen, so daß die Ergiebigkeit der Quellen in Summa Null ist. Einem von Null verschiedenen Werte der Divergenz von $\mathfrak{i}$ würde demnach eine zunehmende oder abnehmende Dichte der Elektrizität entsprechen. Diese würde eine Änderung der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ und damit des Feldes $\mathfrak{E}$ bedingen; eine solche

Änderung aber wäre mit der stationären Stromverteilung nicht vereinbar.

Das Feld des stationären elektrischen Leitungsstromes ist demnach durchweg quellenfrei. Es ist

(156) $$\operatorname{div} \mathfrak{i} = 0 \qquad \text{innerhalb des Leiters,}$$

(156 a) $$\mathfrak{i}_{n1} + \mathfrak{i}_{n2} = 0$$

an der Grenze zweier Leiter,

(156 b) $$\mathfrak{i}_n = 0$$

an der Grenze gegen den Isolator.

Betrachten wir hingegen den nichtstationären Strom, der einen Kondensator ladet oder entladet, so beginnt oder endigt der Leitungsstrom auf einer der Kondensatorplatten; wo er beginnt, nimmt die wahre Ladung entsprechend ab, wo er endigt, nimmt die wahre Ladung zu. Eine Senke des Leitungsstromes würde hiernach eine zeitlich ansteigende Dichte, eine Quelle des Leitungsstromes eine abnehmende Dichte der wahren Elektrizität ergeben. Nun beginnen aber überall dort, wo wahre Ladung sich befindet, elektrische Verschiebungslinien. Das Integral der elektrischen Verschiebung erstreckt sich über eine Fläche, welche eine der Kondensatorplatten einschließt, ist gleich der mit 4π multiplizierten wahren Ladung der Platte, wie die Gleichung (127) besagt. Ist nun J die Stromstärke des auf der Platte endigenden Stromes, so ist nach (151)

$$J = \frac{de}{dt} = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{D}_n df = \frac{1}{4\pi}\int df \frac{\partial \mathfrak{D}_n}{\partial t}.$$

Die Stromstärke des Leitungsstromes, der zur Platte fließt, ist demnach proportional der zeitlichen Zunahme der Zahl der von der Platte ausgehenden Verschiebungslinien. Der Leitungsstrom im Drahte findet seine Fortsetzung in dem „Verschiebungsstrome“ im Dielektrikum. Diese Auffassung des Ladungsvorganges, die sich auf die allgemeingültige Beziehung zwischen wahrer Elektrizität und elektrischer Verschiebung stützt, ist für die Maxwellsche Theorie von grundlegender Bedeutung. Sie gipfelt in dem allgemeinen Satze: Leitungsstrom und Ver-

schiebungstrom zusammen stellen in einem ruhenden Körpersystem eine quellenfreie Strömung dar.

Dem Vektor $\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}$, der Richtung und Dichte des Leitungsstromes bestimmt, tritt jetzt der Vektor

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$$

an die Seite, der Richtung und Größe des Verschiebungsstromes anzeigt.

Während der Leitungsstrom nach dem Joulesche Gesetze von einer Wärmeentwicklung im Leiter begleitet ist, die $(\mathfrak{i}\mathfrak{E}) = \sigma \mathfrak{E}^2$ pro Volumeinheit beträgt, findet im Dielektrikum infolge des Verschiebungsstromes die Energieänderung

$$\frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}^2}{\partial t} = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial(\mathfrak{E}\mathfrak{D})}{\partial t} = \mathfrak{E}\,\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$$

pro Volumeinheit statt, und zwar eine Energiezunahme, wenn der Verschiebungsstrom einen spitzen Winkel mit dem schon bestehenden elektrischen Felde bildet, eine Energieabgabe, wenn die beiden Vektoren einen stumpfen Winkel einschließen.

Der obige Grundsatz des quellenfreien Stromes läßt sich am einfachsten fassen, wenn man sich einen Körper denkt, der sowohl Träger eines Leitungsstromes als eines Verschiebungsstromes sein kann. Nach der Anschauung Maxwells besitzt jeder Körper eine Leitfähigkeit σ und eine Dielektrizitätskonstante ε. Die Dichte des „wahren“ Stromes ist durch den Vektor

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \sigma \mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \tag{157}$$

gegeben. Je nachdem das Feld langsamer oder rascher wechselt, wird der betreffende Körper mehr als Leiter oder als Dielektrikum erscheinen; von der Wechselzahl wird es auch abhängen, ob der elektrische Strom im Körper mehr von Wärmeentwicklung oder von umkehrbarer Änderung elektrischer Energie begleitet ist.

Das oben erwähnte Prinzip besagt nun: der wahre Strom $\mathfrak{c}$ ist durchweg quellenfrei; es ist also

$$\operatorname{div} \mathfrak{c} = 0 \tag{157a}$$

im Innern eines Körpers,

(157 b) $$\mathfrak{c}_{n1} + \mathfrak{c}_{n2} = 0$$

an der Grenze zweier Körper.

Diese Grundgleichungen sind nach (157) und (127 a, b) gleichwertig mit den beiden folgenden

$$\operatorname{div} \mathfrak{i} = -\operatorname{div} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t},$$

$$-(\mathfrak{i}_{n1} + \mathfrak{i}_{n2}) = +\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{D}_{n1} + \mathfrak{D}_{n2}) = -\frac{\partial \omega}{\partial t},$$

die besagen: räumliche Divergenz und Flächendivergenz des Leitungsstromes sind bzw. gleich der zeitlichen Abnahme der räumlichen bzw. der Flächendichte der wahren Elektrizität. Sie sprechen mithin in bezug auf die Raum- und Flächenstücke den allgemeinen Satz aus, daß die Menge wahrer Elektrizität in einem ruhenden Körper nur durch einen Leitungsstrom geändert werden kann; sie gelten in einem jeden ruhenden Körpersystem.

Die erste der beiden Gleichungen ergibt für die Dichte

$$\varrho' = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E}$$

der freien Elektrizität in homogenen Körpern die Beziehung:

$$\sigma \varrho' = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \varrho'}{\partial t}$$ oder, wenn

(158) $\vartheta = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$ gesetzt wird, $\varrho' = \varrho_0' \cdot e^{-\frac{t}{\vartheta}}$, (158a)

wenn ϱ_0' den Wert von ϱ' zur Zeit $t = 0$ angibt. Die Dichte der freien Elektrizität sinkt also innerhalb jedes homogenen Körpers, der sowohl leitend wie dielektrisch ist, mit der Zeit in geometrischer Progression. Die Zeit ϑ, nach der ϱ' auf den e^{-1}ten Teil gesunken ist, ist nach (158) um so kleiner, je größer die Leitfähigkeit des Körpers ist. Sie wird als Relaxationszeit bezeichnet. Für die Metalle ist sie unmeßbar klein, was damit zusammenhängt, daß der Verschiebungsstrom im Metalle auch für die raschesten elektrischen Schwingungen gegen den Leitungsstrom verschwindet. Im Innern eines homogenen Me-

talles stellt sich also in unmeßbar kurzer Zeit ein Feld dar, bei dem

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho' = 0$$

ist. Für reines Wasser dagegen ist die Leitfähigkeit so gering, daß die Relaxationszeit von der Größenordnung meßbarer Zeiten wird.

§ 48. Der Konvektionsstrom.

Wir haben im vorigen Paragraphen nur von ruhenden Körpern gesprochen. Läßt man Bewegungen der Körper zu, so kann die Elektrizität auch ohne Leitungsstrom bewegt werden. Die Fortführung der Elektrizität durch bewegte, geladene Körper bezeichnet man als „Konvektionsstrom“.

Ein elektrisch geladener, isolierter Körper bewege sich etwa im Luftraume oder in einem mit Petroleum gefüllten Gefäße. Man denke sich in dem Isolator eine geschlossene Fläche. Solange der Körper sich außerhalb der Fläche befindet, ist die gesamte elektrische Verschiebung, die er durch die Fläche sendet, gleich Null; sobald er in die Fläche eingetreten ist, wird die elektrische Verschiebung durch die Fläche hindurch gleich der wahren Elektrizitätsmenge, welche der Körper in das Innere der Fläche eingeführt hat. Es hat also gleichzeitig mit dem Eintritt des Körpers die elektrische Verschiebung sich geändert, es ist ein Verschiebungsstrom durch die Fläche hindurchgetreten. Hier bilden Konvektionsstrom und Verschiebungsstrom zusammen den geschlossenen Strom.

Im allgemeinen Falle werden Leitungsstrom, Konvektionsstrom und Verschiebungsstrom zusammen einen geschlossenen Strom ergeben. Die Dichte des Konvektionsstromes ist offenbar

$$\mathfrak{k} = \varrho \mathfrak{v}, \tag{159}$$

wenn $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Teilchens ist, an dem die Ladung mit der Dichte ϱ haftet. Wenn konvektive Bewegungen wahrer Elektrizität stattfinden, so ist als quellenfrei der Vektor:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho\mathfrak{v} = \mathfrak{i} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{D} \tag{159a}$$

anzusehen, welcher für ruhende Körper in den Vektor (157) übergeht.

Nicht immer ist es möglich, Leitungsstrom und Konvektionsstrom scharf voneinander zu sondern. Betrachten wir z. B. einen Elektrolyten, d. h. einen Körper, der beim Durchgang des Stromes eine chemische Zersetzung erfährt. Für einen solchen Körper gelten die beiden von Faraday entdeckten Gesetze: Die zersetzte Menge des Elektrolyten ist der hindurchgegangenen Elektrizitätsmenge proportional. In verschiedenen Elektrolyten zersetzt ein gegebener Strom in gleichen Zeiten chemisch äquivalente Mengen. Diese beiden Gesetze, die übrigens im Voltameter zur Strommessung verwandt werden, deutet bekanntlich die Elektrochemie folgendermaßen. Es sollen Verbindungen positiver und negativer Elektrizitätsmengen mit wägbaren Massenteilchen, sogenannte „Ionen" sein, welche den Strom in Elektrolyten transportieren. Hier kann man im Zweifel sein, ob man es im Sinne der Maxwellschen Theorie mit einem Leitungsstrome oder mit einem Konvektionsstrome zu tun hat. Die den Leitungsstrom kennzeichnenden Gesetze von Ohm und Joule gelten auch in Elektrolyten, anderseits soll die Elektrizität bei ihrer Bewegung an wägbare Massen gebunden sein, wie bei einem Konvektionsstrome. Die Maxwellsche Theorie in ihrer ursprünglichen Form geht einer Entscheidung dieser Frage aus dem Wege; sie begnügt sich mit der Feststellung, daß die Verknüpfung des Stromes mit der Feldstärke und mit der Wärmeentwicklung hier die gleiche ist wie bei den Metallen und daß es für die Bestimmung des wahren Stromes (159a) nicht darauf ankommt, ob die Fortführung der Elektrizität in Form des Leitungsstromes oder des Konvektionsstromes erfolgt.

Auch verzichtet die Maxwellsche Theorie in ihrer ursprünglichen, rein phänomenologischen Gestalt darauf, über die molekularen Vorgänge, welche im elektrischen Strome stattfinden, etwas auszusagen. Und doch legen gerade die Faradayschen Gesetze die Hypothese nahe, daß der Elektrizität wie der Materie eine atomistische Struktur zuzuschreiben ist und daß die Ionen Verbindungen chemischer und elektrischer Atome sind, die, der chemischen Valenz entsprechend, sich vereinigt haben. Dieser für die Elektrochemie so fruchtbaren Vorstellung gegenüber

nahm die Maxwellsche Theorie zunächst eine unentschiedene Stellung ein.

Erst der *Elektronentheorie* gelang es, die atomistische Hypothese für die Weiterbildung der Maxwellschen Theorie zu verwerten. Sie konnte sich dabei insbesondere auf gewisse, den Elektrizitätsdurchgang durch verdünnte Gase begleitende Erscheinungen, die sogenannten „*Kathodenstrahlen*“ berufen. Diese von der Kathode ausgehenden Strahlen führen negative Elektrizität mit sich; sie besitzen ferner eine gewisse Trägheit, die jedoch viel geringer ist, als die Trägheit elektrochemischer Ionen. Die träge Masse der in den Kathodenstrahlen bewegten elektrischen Partikel beträgt nur ein 2000tel derjenigen Masse, welche man bei der gleichen Ladung dem Wasserstoffion zuschreibt. Das Verhältnis von Ladung und träger Masse, welches den Kathodenstrahlen zukommt, ergab sich als unabhängig von der chemischen Natur der Kathode und der Gasfüllung. Es lag die Annahme nahe, daß man es hier mit den freien Atomen der negativen Elektrizität, den freien „Elektronen“, zu tun habe. Diese Hypothese konnte auch von Erscheinungen Rechenschaft geben, welche die von radioaktiven Körpern ausgehenden negativen Elektrizitätsteilchen aufweisen. Es ergaben nämlich die messenden Versuche W. Kaufmanns, daß die träge Masse bei diesen sehr rasch, fast mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Teilchen mit wachsender Geschwindigkeit ansteigt; dieses Ansteigen ließ sich dadurch erklären, daß man die träge Masse nur als Folge der elektrischen Ladung der Elektronen auffaßte. Wir werden hierauf ausführlicher erst im zweiten Bande dieses Werkes eingehen. Zunächst interessiert uns das Ergebnis, daß es Elektrizitätsbewegungen gibt, die man als Konvektionsstrom aufzufassen hat, obwohl sie nicht mit Bewegungen des wägbaren Stoffes gekoppelt sind. Die Bewegung der Elektronen findet in dem sonst leeren Raume statt, sie hängt nur ab von dem hier herrschenden elektromagnetischen Felde; die Gesetze von Ohm und Joule versagen hier vollkommen.

Die Elektronentheorie geht noch einen Schritt weiter; sie behauptet, daß jeder Leitungsstrom im Grunde ein Konvektions-

strom bewegter Elektronen ist. In Elektrolyten sollen die Elektronen an die wägbaren Atome gebunden sein, in Metallen hingegen, wo chemische Vorgänge den Strom nicht begleiten, sollen sich die Elektronen frei bewegen können. Fließt kein Leitungsstrom durch die Metalle, so sollen die Elektronen in regelloser Bewegung begriffen sein, ähnlich wie die Moleküle eines Gases; der Einfluß äußerer elektrischer Kräfte aber soll bewirken, daß im Mittel mehr Elektronen nach der einen Seite als nach der anderen wandern. So erklärt man das Entstehen eines elektrischen Stromes und insbesondere die Gültigkeit der Gesetze von Ohm und Joule.

Sogar einen Teil des Verschiebungsstromes will die Elektronentheorie auf den Konvektionsstrom bewegter Elektronen zurückführen. Mit Rücksicht auf (134) kann man die Dichte des Verschiebungsstromes in zwei Bestandteile zerlegen:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}.$$

Der erste Bestandteil, der gleich der zeitlichen Änderung der Polarisation ist und den man passend als „Polarisationsstrom“ bezeichnen kann, ist durch die Anwesenheit des Dielektrikums bedingt, während der zweite Bestandteil auch im leeren Raume in Rechnung zu ziehen ist, sobald das elektrische Feld sich zeitlich ändert. Jenen ersten Bestandteil des Verschiebungsstromes nun faßt die Elektronentheorie als Bewegung der im Dielektrikum enthaltenen, durch quasielastische Kräfte an Gleichgewichtslagen gebundenen Elektronen auf. Sie kennt demnach nur zwei Arten des Stromes: Verschiebungsstrom im Äther und Konvektionsstrom der Elektronen. Der Einfluß der Materie auf das elektromagnetische Feld soll ausschließlich auf die in ihr enthaltenen Elektronen zurückzuführen sein.

So fruchtbar nun auch die soeben dargelegte Auffassung für die Elektrizitätstheorie geworden ist, so erschien es doch zweckmäßig, in diesem ersten Bande der „Theorie der Elektrizität“ auf dem klassischen Standpunkte von Maxwell und Hertz stehen zu bleiben und erst im zweiten Bande zur Elektronentheorie fortzuschreiten. Das Verhältnis der beiden Theorien ist in mancher

Hinsicht mit dem Verhältnis der Thermodynamik und Mechanik zur Kinetik vergleichbar. Wie nur derjenige, der Thermodynamik getrieben hat, die Erfolge der kinetischen Theorie gebührend einzuschätzen weiß, so kann die Elektronentheorie nur gewürdigt werden, wenn man sieht, daß sie zur Erkenntnis neuer, in der Maxwellschen Theorie nicht enthaltener Wahrheiten führt. Und wie die Gastheorie die hypothetischen Moleküle nach den Gesetzen der Mechanik wirklicher Körper behandeln muß, so bestimmt die Dynamik der Elektronen die Felder dieser hypothetischen Teilchen auf Grund derjenigen Gesetze, welche Maxwell für die wirklichen elektrischen Felder aufgestellt hat. Auch hat die Elektronentheorie den Nachweis zu erbringen, daß sie durch Mittelwertsbildung zu den durch die Erfahrung bestätigten Maxwellschen Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes zurückgelangt, wie die Gastheorie ihre Hypothesen dadurch rechtfertigt, daß sie die Übereinstimmung ihrer Folgerungen mit den allgemeinen Gesetzen der Thermodynamik nachzuweisen sucht. Wir legen aus diesen Gründen im ersten Bande dieses Werkes die Maxwellsche Theorie in ihrer ursprünglichen Form der Darstellung zugrunde; die Erörterung solcher Fragen, bei denen diese Theorie in ihrer ursprünglichen Form versagt, weisen wir dem zweiten Bande zu.

§ 49. Die elektromotorischen oder eingeprägten elektrischen Kräfte.

Wir kehren zurück zu dem stationären Strome, der in einer geschlossenen Leitung fließt. Das Ohmsche Gesetz, welches in § 46 für homogene Körper ausgedrückt worden ist, ergibt für geschlossene lineare Leiter aus homogenem Materiale, daß J gleich Null ist; dies folgt aus (152) oder (155), falls man Anfangspunkt und Endpunkt der Leitung zusammenfallen läßt, wenn anders das elektrische Feld sich aus einem einwertigen Potentiale ableitet. In der Tat lehrt die Erfahrung, daß in einem geschlossenen, physikalisch und chemisch homogenen Leitungskreise kein Strom fließt, es sei denn, daß äußere Einwirkungen stattfinden. Fließt in einem derartigen Kreise ein

stationärer Strom, so wird man das Produkt aus Stromstärke J und Gesamtwiderstand R der Leitung als Maß der äußeren Einwirkungen betrachten. Man schreibt gewöhnlich

$$E^e = JR \tag{160}$$

und nennt E^e die elektromotorische Kraft. Besser ist es, in dieser verallgemeinerten Fassung des Ohmschen Integralgesetzes E^e die „elektromotorische Integralkraft“ zu nennen.

Der Begriff der elektromotorischen Kraft entspricht ganz dem Begriffe der „äußeren“ oder der „eingeprägten“ Kraft in der Mechanik. Man versteht darunter eine Kraft, die nicht durch die Bedingungen, denen das betrachtete System an sich unterworfen ist, mit bestimmt wird, sondern die in willkürlicher Weise mit Hilfe von Mitteln, die in keinem notwendigen Zusammenhange mit dem Systeme stehen, daran angebracht ist. So stehen in einem aus elastischen Körpern aufgebauten Systeme die darin auftretenden Spannungen oder inneren Kräfte in einem gesetzmäßigen Zusammenhange unter sich und mit den Deformationen und Beschleunigungen; äußere Kräfte aber können in ganz willkürlicher Weise daran angebracht werden. Allerdings wirken diese auf die Verteilung der inneren Spannungen bestimmend ein, aber nur in dem Sinne, daß die Bedingungen, denen das System unterworfen ist, eine Änderung erfahren haben. Die äußeren Kräfte stehen daher den Vorgängen im Systeme in dem Verhältnisse von Ursache und Wirkung gegenüber, ganz ebenso wie die elektromotorische oder eingeprägte elektrische Kraft dem elektrischen Felde und dem Strome eines Leitungskreises.

Die Einführung äußerer oder eingeprägter Kräfte geschieht in der Mechanik zuweilen nur aus dem Grunde, weil man sich auf die Betrachtung eines Teilsystemes beschränkt. Sind in dem obigen Beispiele die äußeren Kräfte durch Lasten gegeben, die wir in beliebiger Verteilung anbringen können, so ist ihre Einwirkung durch die Gesetze der Mechanik bestimmt; sie werden zu inneren Kräften, wenn man das Schwerefeld der Erde in das System einbezieht. Dem entspricht auf elektrischem Gebiete diejenige elektromotorische Kraft, welche man als „induzierte“ be-

zeichnet. Diese verdankt, wie wir im dritten Abschnitte dieser Schrift darlegen werden, Schwankungen des magnetischen Feldes in der Umgebung eines ruhenden Leitungskreises oder der Bewegung eines Leiters im magnetischen Felde ihren Ursprung. Diese Kräfte stellen sich nur dann als äußere dar, wenn man davon absieht, das magnetische Feld in das System einzubeziehen. Sie werden zu inneren Kräften, deren Wirkungsweise durch die Gesetze der Elektrodynamik bestimmt ist, sobald man das magnetische Feld mit zu dem betrachteten Systeme rechnet. Es ist also Ursprung und Gesetz der induzierten elektromotorischen Kräfte bekannt. Sie werden den eingeprägten Kräften nur dann zugezählt, wenn man den elektrischen Strom bestimmen will, ohne vom magnetischen Felde zu reden.

In anderen Fällen hingegen geschieht die Einführung äußerer Kräfte in der Mechanik aus dem Grunde, weil man es mit Einwirkungen auf das System zu tun hat, die vom Standpunkte der Mechanik aus nicht in zureichender Weise zu erklären sind. Hierher gehören etwa Bewegungen von Magneten oder von elektrisch geladenen Körpern oder auch Bewegungen explodierender Körper. Wenn die Mechanik behauptet, alle in der Natur vorkommenden Bewegungen der Körper beschreiben zu können, so behält sie sich stillschweigend vor, solche Bewegungen, die sich rein mechanisch nicht deuten lassen, mit Hilfe eingeprägter Kräfte darzustellen. Diese sind in den genannten Fällen unentbehrlich, bis man das Gesetz der magnetischen und elektrischen Wechselwirkungen bzw. der chemischen Vorgänge bei der Explosion mechanisch gedeutet hat. Solange dies nicht geschehen ist, ist es nicht möglich, die Vorgänge vollständig auf Grund der Gesetze der Mechanik zu verfolgen, weil es eben nicht rein mechanische Vorgänge sind. Die Mechanik behandelt nur eine Seite der Naturvorgänge, und sie versagt, wenn Vorgänge nichtmechanischer Art mitspielen. Sie verdeckt ihre Unkenntnis, indem sie die Einwirkungen anderer physikalischer oder chemischer Prozesse durch eingeprägte Kräfte darstellt.

Die entsprechende Bedeutung hat bisweilen die Einführung eingeprägter Kräfte in der Elektrizitätslehre. Die Kontaktkraft,

welche bei der Berührung chemisch verschiedener Körper entsteht, die elektromotorische Kraft in ungleichmäßig konzentrierten elektrolytischen Lösungen, die thermoelektrische Kraft muß man als eingeprägte Kräfte behandeln, weil sie vom Standpunkte der reinen Elektrizitätslehre aus nicht erklärt sind. Hier spielen chemische und thermische Vorgänge mit, deren Gesetz nur in einzelnen Fällen bekannt ist. Wenn man sich auf die Beschreibung der elektromagnetischen Erscheinungen beschränkt, muß man hier, wo Vorgänge anderer Art mitspielen, zur Einführung eingeprägter elektromotorischer Kräfte seine Zuflucht nehmen.

Bei der Erregung und Erhaltung elektrischer Felder spielen stets Kräfte nichtelektrischer Art mit. Die positive und negative Elektrizität würden in der Tat ihrem Vereinigungsbestreben folgen, und ein jedes elektrische Feld würde bald erlöschen, wenn nicht solche Kräfte mitwirkten. So kommt es, daß gerade die bei der Erregung der Felder stattfindenden Erscheinungen der Berührungs- und Reibungselektrizität, des permanenten Magnetismus, in ihrer Wirkungsweise gar nicht oder doch nur unvollkommen verstanden sind. Die historische Entwicklung des Elektromagnetismus beginnt mit meist vergeblichen Versuchen, die genannten Erscheinungen aufzuklären. Faraday und Maxwell haben dann die Gesetze der räumlichen Verteilung und des zeitlichen Verlaufes elektromagnetischer Felder erforscht und der Elektrizitätslehre eine Grundlage gegeben, welche an Sicherheit derjenigen der Mechanik gleichkommt. Die Elektrizitätslehre kann jetzt behaupten, die elektromagnetischen Vorgänge zu beschreiben, mit demselben Rechte, wie die Mechanik behauptet, die Bewegungen der wägbaren Körper zu beschreiben. Die Einwirkung solcher physikalischer oder chemischer Vorgänge indessen, welche ihrem Lehrgebäude fremd sind, muß sie, ebenso wie die Mechanik, mit Hilfe eingeprägter Kräfte darstellen. Zu diesen Vorgängen gehören naturgemäß gerade diejenigen, die am längsten bekannt sind und die bei der Erregung der Felder stets in Erscheinung treten.

Von dem durch die Erfahrung gegebenen Ohmschen Integralgesetze (152) gingen wir zu dem Differentialgesetze (152a) über;

auf chemisch oder thermisch inhomogene Leiter dehnen wir das letztere aus, indem wir setzen

$$\mathfrak{i} = \sigma(\mathfrak{E}^s + \mathfrak{E}^e) = \sigma \mathfrak{E}. \tag{161}$$

Dabei stellt $\mathfrak{E}^e$ die an dem betreffenden Punkte des Leiters infolge seiner chemischen oder thermischen Inhomogenität wirksame „eingeprägte oder elektromotorische Kraft" dar, $\mathfrak{E}^s$ die früher allein berücksichtigte, durch die Verteilung der freien Ladungen bestimmte „elektrostatische Kraft", welche sich im Felde des stationären Stromes als negativer Gradient eines skalaren, einwertigen Potentiales φ darstellt:

$$\mathfrak{E}^s = -\nabla\varphi. \tag{161a}$$

Die aus der elektrostatischen Kraft $\mathfrak{E}^s$ und der eingeprägten Kraft $\mathfrak{E}^e$ zusammengesetzte „gesamte elektrische Feldstärke" $\mathfrak{E}$ ist nach (161) für die Dichte des Leitungsstromes an der betreffenden Stelle maßgebend.

Nehmen wir jetzt, unter Berücksichtigung der eingeprägten Kraft, die am Schlusse des § 46 durchgeführte Betrachtung wieder auf, so erhalten wir für den linearen Leiter

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{\sigma}\mathfrak{i}_s - \mathfrak{E}_s^e,$$

und durch Integration längs der Leitlinie, von P_1 bis P_2

$$\varphi_1 - \varphi_2 = J\int_1^2 \frac{ds}{\sigma q} - E^e, \tag{161b}$$

wo

$$E^e = \int_1^2 \mathfrak{E}_s^e\, ds \tag{161c}$$

das längs der Leitlinie von P_1 bis P_2 genommene Linienintegral der eingeprägten Kraft, oder die für diese Kurve berechnete eingeprägte Integralkraft ist. Für einen geschlossenen Leiter ist E^e die elektromotorische Integralkraft des ganzen Kreises; da hier die Punkte P_1 und P_2 zusammenfallen, so verschwindet die linke Seite von (161b), und diese Gleichung geht in (160) über.

§ 50. Die elektrische Kontaktkraft.

Nimmt man den Übergang in der Grenzschicht zweier chemisch verschiedener Leiter als stetig an, so wird die eingeprägte Kraft $\mathfrak{E}^e$, mithin (nach Gl. 161) auch die elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}^s$ endlich sein, es wird daher das elektrostatische Potential φ der freien Ladungen, dessen Gradient $-\mathfrak{E}^s$ ist, sich stetig verhalten. Geht man indessen zum Grenzfalle einer mathematischen Trennungsfläche über, so wird das von dem ersten Leiter zum zweiten erstreckte Integral von $\mathfrak{E}^e$, welches durch den Grenzwert des Ausdruckes (161c) gegeben wird, einen von Null verschiedenen Wert E_{12} annehmen können; in diesem Falle besteht eine „Kontaktkraft" E_{12} an der Trennungsfläche. Da der Ohmsche Widerstand des Stückes $P_1 P_2$ bei diesem Grenzübergang verschwindet, die Stromstärke J aber stets endlich ist, so folgt aus (161b) für diesen Fall

$$\varphi_2 - \varphi_1 = E_{12}; \tag{161d}$$

dies ist der elektrostatische Potentialsprung an der Trennungsfläche der beiden Leiter.

Ein solcher Potentialsprung kann den allgemeinen Gesetzen der Vektorfelder (§ 18) zufolge einer Doppelschicht zugeschrieben werden, und zwar hier einer Doppelschicht freier Elektrizität, deren Sitz die Trennungsfläche der beiden Körper ist. Im Innern der homogenen Leiter ist $\mathfrak{E}^e = 0$ und die Leitfähigkeit endlich. Hier ist, wie bereits in § 47 bemerkt worden ist, die Dichte der freien Elektrizität gleich Null. Das elektrische Feld rührt her von einfachen Schichten und von Doppelschichten freier Elektrizität, die sowohl dort, wo zwei Leiter aneinander, als auch dort, wo die Leiter an den Isolator grenzen, ihren Sitz haben können. Dabei wird, da der Übergang zweier in Berührung gebrachter Körper stetig ist, die Doppelschicht nicht strenge verwirklicht sein, sondern es werden zwei benachbarte Schichten freier Elektrizität auftreten, von denen die positive auf dem Körper sitzt, welcher das größere, die negative auf dem Körper, der das kleinere Potential angenommen hat.

Im Falle des elektrischen Gleichgewichtes ist das Feld $\mathfrak{E}^s$ und die Verteilung der freien Elektrizität auf der Oberfläche der

Leiter bestimmt, wenn die Kontaktkräfte an der Grenze der sich berührenden Körper und dadurch die Potentialdifferenzen je zweier solcher Körper gegeben sind. Im Innern der homogenen Leiter ist $\mathfrak{E}^e = 0$, mithin, da $\mathfrak{i} = 0$, auch $\mathfrak{E}^s = 0$. Folglich befindet sich an der Grenze zweier solcher Leiter im ganzen keine freie Elektrizität, da ja der Sprung der Normalkomponente von $\mathfrak{E}^s$ Null ist. Hier hat nur die Doppelschicht ihren Sitz, deren Moment durch den Sprung von φ bestimmt ist und die ebensoviel freie Elektrizität positiven wie negativen Vorzeichens enthält.

Durchfließt hingegen ein Strom die Trennungsfläche zweier Leiter, so ist im Innern der homogenen Leiter $\mathfrak{E}^e$ zwar gleich Null, aber $\mathfrak{i}$ und somit $\mathfrak{E}^s$ von Null verschieden. Auch ist an der Trennungsfläche zweier Leiter die Normalkomponente von $\mathfrak{i}$ nach (156a) stetig, aber σ ist im allgemeinen unstetig, so daß hier sehr wohl eine Flächendivergenz von $\mathfrak{E}^s$, d. h. freie Elektrizität positiven oder negativen Vorzeichens auftreten kann. Alsdann sitzt auf der Trennungsfläche der beiden Leiter außer der Doppelschicht noch eine einfache Belegung freier Elektrizität; dazu kommen ferner einfache und wahrscheinlich auch Doppelschichten an der Grenzfläche gegen den Isolator.

Alles dieses sind mathematische Folgerungen aus der Beziehung (161), die durchaus nicht darüber aufklären, durch welche Umstände die bei thermischer oder chemischer Inhomogenität auftretenden elektromotorischen Kräfte bedingt sind. Ja sie geben nicht einmal darüber Auskunft, welcher Strom den in Berührung gebrachten Oberflächen der Leiter bei der Bildung der Doppelschicht zufließt. Denn es war bisher nur von der freien Elektrizität die Rede, die von der Divergenz des Vektors $\mathfrak{E}^s$ abhängt, der Strom jedoch ist mit Ansammlung wahrer Elektrizität verbunden, die der Divergenz von $\mathfrak{D}$ proportional ist. Die Frage nach der Verteilung des Vektors $\mathfrak{D}$ in der Übergangsschicht zweier Leiter ist aber eine sehr schwierige; sie hängt mit der Frage zusammen, welche Dielektrizitätskonstanten den Metallen zukommen. Wir sind daher nicht in der Lage, über die wahre Elektrizität, die sich an der Oberfläche eines Metalles bei Berührung mit einem anderen Leiter ansammelt, etwas auszusagen.

Die Zurückführung der Kontaktkraft auf eine Doppelschicht freier Elektrizität rührt von Helmholtz her. Nun haben wir in der allgemeinen Theorie der Vektorfelder (§ 24) gesehen, daß eine Doppelschicht von Quellen in dem umgebenden Raume die gleiche Strömung erzeugt wie eine auf der Randkurve der Doppelschicht befindliche Wirbellinie. Wir können daher das Feld $\mathfrak{E}^s$, anstatt es als wirbelfrei anzusehen und Doppelschichten anzunehmen, auf das Vorhandensein einer Wirbellinie zurückführen; der Sitz dieser Wirbellinie ist die Randkurve der früher angenommenen Doppelschicht. Das ist um so eher gestattet, als unsere Beobachtungen sich nicht auf das Innere der beiden Leiter beziehen. Es mag z. B. die Lötstelle eines Zinkkupferstabes betrachtet werden. Aus der Erfahrung ist in der Tat nur dies bekannt, daß sich außerhalb des Zinkkupferkörpers ein elektrostatisches Feld ausbildet. Dazu kommt, daß nach dem, was wir über die Eigenschaft der homogenen Leiter wissen, überall im Innern derselben im Gleichgewichtsfalle $\mathfrak{E}^s$ verschwindet. Was aber das gesamte Feld $\mathfrak{E}^s$ im Innern der Metalle und in der Luft anbelangt, so kann dasselbe nach § 24 mit demselben Rechte einer Doppelschicht freier Ladungen auf der Trennungsfläche Zink-Kupfer oder auch einem Wirbel von entsprechender Stärke auf der Linie zugeschrieben werden, längs deren Zink, Kupfer und Luft zusammenstoßen. Das Vorhandensein eines solchen Wirbels behauptet nun die Theorie von Heaviside. Sie nimmt an, daß ein magnetischer Strom längs jener Linie zirkuliert; es bedingt nämlich, wie wir später sehen werden, ein magnetischer Strom einen Wirbel der elektrischen Feldstärke. Es soll aber durchaus nicht behauptet werden, daß hier wirklich ein solcher Strom fließt, sondern nur, daß die Ausgangsstelle für das Feld in einer Wirbellinie zu suchen ist, und das ist in der Tat eine zulässige Vorstellung. Wünscht man sie weiter auszuführen, so wird man annehmen, daß durch Wirkungen, über die wir zunächst keine Rechenschaft zu geben vermögen, jedenfalls aber infolge des Zusammentreffens der drei Stoffe (Zink, Kupfer, Luft) an dieser Stelle ein Wirbel der eingeprägten Kraft $\mathfrak{E}^e$ hervorgerufen wird. Überall sonst ist $\mathfrak{E}^e$ quellenfrei und wirbelfrei. Dazu tritt nun

ein elektrostatisches Feld $\mathfrak{E}^s$ derart, daß im Innern der beiden Metalle und auch in der Lötstelle

$$\mathfrak{E}^e + \mathfrak{E}^s = 0$$

wird, sobald elektrostatisches Gleichgewicht sich hergestellt hat. Dann ist auch $\mathfrak{E}^s$ im Innern der Metalle und an der Lötstelle quellenfrei; nur auf den an die Luft angrenzenden Oberflächen des Zinkes und des Kupfers ist eine Flächendivergenz von $\mathfrak{E}^s$ vorhanden. Das Feld $\mathfrak{E}^s$ ist, im Gegensatze zu demjenigen von $\mathfrak{E}^e$, durchweg wirbelfrei.

Zwischen den Theorien von Helmholtz und Heaviside experimentell zu entscheiden, dürfte kaum möglich sein, da beide bezüglich des zu beobachtenden Feldes zu denselben Ergebnissen führen. Es ist ja überhaupt das Problem, ob die Kontaktpotentialdifferenz wirklich auf der Trennungsfläche Zink-Kupfer ihren Sitz hat, durchaus nicht gelöst. Einige Forscher neigen sogar der Ansicht zu, daß der Sitz der Kontaktkraft ausschließlich in den an die Luft angrenzenden Oberflächen der Metalle zu suchen ist. Es ist daher jedenfalls sehr bemerkenswert, daß es eine Theorie gibt, welche jene Frage überhaupt nicht aufwirft, indem sie das Zusammentreffen dreier chemisch verschiedener Körper als notwendig zur Erregung einer Kontaktkraft ansieht.

Selbst wenn man es, in Helmholtzscher Auffassung, mit drei Doppelschichten an den Trennungsflächen Zink-Kupfer, Kupfer-Luft und Luft-Zink zu tun hätte, so würde deren Ersetzung durch die äquivalenten Wirbellinien doch wieder nur eine einzige Heavisidesche Wirbellinie längs der Kurve ergeben, wo Zink, Kupfer und Luft zusammentreffen.

Bekanntlich genügen die Kontaktkräfte an der Grenze von Leitern erster Klasse, wenn sie überhaupt existieren, dem Gesetz der Spannungsreihe

$$E_{12} + E_{23} + E_{31} = 0.$$

Dies folgt aus der Tatsache, daß in einem aus drei thermisch und chemisch homogenen Leitern erster Klasse zusammengesetzten Leitungskreise kein stationärer Strom fließt.

Wird aber einer der Leiter erster Klasse durch einen solchen

zweiter Klasse, d. h. einen elektrolytischen Leiter ersetzt, so ist eine elektromotorische Kraft, im allgemeinen von der Größenordnung eines Volt, in dem Kreise vorhanden. Es ist hier

$$E_{12} + E_{23} + E_{31} = E^e \neq 0. \tag{161e}$$

An der Grenzfläche eines Metalles und eines Elektrolyten ist also jedenfalls eine Kontaktkraft anzunehmen. Die Energie, auf deren Kosten der elektrische Strom entsteht, ist hier chemischen Ursprungs. In gewissen Fällen, z. B. für ein Metall, das in eine verdünnte Lösung eines seiner Salze taucht, kann man den beim Stromdurchgang stattfindenden chemischen Prozeß auf Grund der osmotischen Theorie verfolgen und so die Kontaktkraft theoretisch bestimmen.

Für die Joulesche Wärme wollen wir auch dort, wo eingeprägte Kräfte wirken, die Gleichung (154a) als gültig ansehen. Dann bleiben die Überlegungen, welche für lineare Leiter zu (155a) geführt haben, zutreffend und ergeben, zusammen mit (160), für einen geschlossenen linearen Leiter mit eingeprägten Kräften

$$Q = JE^e. \tag{161f}$$

Es ist also die im ganzen Kreise erzeugte Joulesche Wärme gleich der Arbeit, welche die eingeprägten Kräfte beim Stromdurchgang leisten. Diese Arbeitsleistung erfolgt auf Kosten chemischer Energie, wie denn auch der Stromdurchgang durch Leiter zweiter Klasse stets von chemischen Vorgängen begleitet ist. In einem Kreise aus Leitern erster Klasse hingegen fallen mit den chemischen Wirkungen des elektrischen Stromes auch die elektromotorischen Kräfte chemischen Ursprungs fort.

§ 51. Räumlich verteilte elektromotorische Kräfte.

Der Kontaktkraft an der Grenze zweier chemisch verschiedener Körper steht die räumlich verteilte eingeprägte Kraft gegenüber, die in chemisch oder thermisch inhomogenen Körpern ihren Sitz hat. Sie hängt ab von der Art, wie die chemische Zusammensetzung bzw. die Temperatur sich von Punkt zu Punkt ändert. Diese eingeprägten Kräfte kennt man am besten für verdünnte elektrolytische Lösungen, in denen man die Vorgänge auf

Grund der elektrolytischen Dissoziationstheorie verfolgen kann. Hier ruft die gesamte Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^s + \mathfrak{E}^e$$

einen Leitungsstrom hervor. Im Gleichgewichtsfalle muß im Innern des Leiters $\mathfrak{E}$ gleich Null sein. Dabei ist unter $\mathfrak{E}^s$ der Durchschnittswert der elektrostatischen Kraft für ein kleines Volumen zu verstehen, welches jedoch eine große Zahl von Ionen enthält. In molekularen Bezirken besteht auch im Gleichgewichtsfalle der von den Ionen ausgehende Kraftfluß, doch ist das Feld hier stetem Wechsel unterworfen, so daß im Durchschnitt keine Richtung im Raume bevorzugt ist und daß bei der Mittelwertsbildung $\mathfrak{E}$ verschwindet. Damit dies der Fall sei, muß freie Elektrizität sich in der Weise ansammeln, daß die elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}^s$ der eingeprägten Kraft $\mathfrak{E}^e$ das Gleichgewicht hält. Die eingeprägte Kraft $\mathfrak{E}^e$ ist dabei die osmotische Kraft, welche die Konzentration der Lösung auszugleichen sucht; diese wirkt auf die wägbaren Atome des gelösten Stoffes und daher auch auf die mit jenen verkoppelten positiven und negativen Elektrizitäten. Sie wirkt auf die positiven und die negativen Ionen in gleichem Sinne, indem sie dieselben von Stellen größerer zu Stellen geringerer Konzentration treibt. Die elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}^s$ hingegen treibt die negativen Ionen in entgegengesetzter Richtung wie die positiven. Die Bedingung der Stromlosigkeit gestattet es, wie W. Nernst zeigte, die elektromotorische Kraft in einer Lösung eines Elektrolyten von wechselnder Konzentration aus den Wanderungsgeschwindigkeiten der Ionen zu berechnen. Diese räumlichen elektromotorischen Kräfte, deren Bestehen mit einer Diffusion des Elektrolyten verbunden sind, sind viel kleiner als die flächenhaften Kontaktkräfte, die an der Grenze eines Metalles und einer elektrolytischen Lösung wirken.

Von weit geringerem Betrage als diese im vorigen Paragraphen besprochenen Kontaktkräfte sind auch diejenigen eingeprägten Kräfte, die man als thermoelektrische bezeichnet. Dieselben treten in einem aus zwei Metallen bestehenden geschlossenen Stromkreise auf, wenn die beiden Lötstellen verschiedene Temperaturen besitzen. Da den Strom hier keine Überführung wäg-

barer Masse, mithin auch kein chemischer Vorgang begleitet, so entsteht die Frage nach der Energiequelle, welche die elektromotorische Kraft verursacht. Diese Frage wird beantwortet durch den Peltier-Effekt. Der Strom kühlt im allgemeinen die wärmere Lötstelle ab, er erwärmt die kältere; die Differenz der beim Durchgange der Elektrizitätsmenge 1 den Lötstellen zugeführten bzw. entzogenen Wärmemengen Q_1, Q_2 ist im Sinne des ersten Hauptsatzes der Arbeit der thermoelektrischen Kräfte gleichwertig. Ein in entgegengesetzter Richtung fließender, durch sonstige elektromotorische Kräfte unterhaltener Strom würde umgekehrt Arbeit gegen die thermoelektrischen Kräfte leisten, so daß beim Durchgange der Einheitsladung die Wärme Q_2 der kälteren Lötstelle entzogen und Q_1 der wärmeren Lötstelle zugeführt wird. Wir haben also hier thermische Vorgänge, die, im Gegensatz zur Jouleschen Wärmeentwicklung, umkehrbar verlaufen. Die dabei auftretenden thermoelektrischen Kräfte scheinen zunächst flächenhaft verteilt zu sein; es zeigt jedoch die genauere Untersuchung, daß es nicht gelingt, auf Grund dieser Voraussetzung die Tatsachen befriedigend darzustellen.

Wendet man nämlich auf jene umkehrbare, zwischen den Temperaturen T_1, T_2 der Lötstellen arbeitende Wärmemaschine den zweiten Hauptsatz an, so erhält man

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1 - Q_2}{T_1 - T_2}.$$

Hiernach müßte der Peltier-Effekt der absoluten Temperatur der Lötstelle proportional sein, und es müßte die elektromotorische Kraft des Thermoelementes

$$E^e = Q_1 - Q_2 = (T_1 - T_2)\,\frac{Q_2}{T_2},$$

d. h. bei konstant gehaltener Temperatur der kälteren Lötstelle der Differenz der Temperaturen der beiden Lötstellen proportional sein. Diese Folgerung wird durch die Erfahrung keineswegs bestätigt; es gibt im Gegenteil Thermoelemente, deren elektromotorische Kraft bei Erwärmung der heißeren Lötstelle nicht wächst, sondern abnimmt.

Dies führte W. Thomson zu dem Schlusse, daß in einem Ther-

moelemente außer den flächenhaften elektromotorischen Kräften an der Grenze der beiden Metalle noch räumliche Kräfte im Innern der Metalle wirksam sind überall dort, wo ein Temperaturgefälle vorhanden ist. Hier findet, dem Peltiereffekte entsprechend, der sogenannte Thomsoneffekt statt, eine umkehrbare thermische Wirkung. Man kann den Vorgang so auffassen, daß in einem chemisch homogenen Metalle infolge eines Temperaturgefälles eingeprägte elektrische Kräfte auftreten. Diese in beiden Metallen wirksamen räumlich verteilten Kräfte, zusammen mit den flächenhaften elektromotorischen Kräften der Lötstellen, ergeben die ganze elektromotorische Kraft des Thermoelementes; der entstehende Strom ist begleitet von einem Wärmestrom, der bei Umkehrung der Stromrichtung in entgegengesetztem Sinne verlaufen würde.

Die Analogie der in elektrolytischen Lösungen infolge des Konzentrationsgefälles und in Metallen infolge des Temperaturgefälles auftretenden elektromotorischen Kräfte legt es nahe, hier über den Mechanismus ähnliche Vorstellungen zu entwickeln wie dort. Dies versuchen in der Tat die von E. Riecke, P. Drude und H. A. Lorentz herrührenden neueren Elektronentheorien der Metalle, von denen bereits in § 48 die Rede war. Die Konzentration der freien Elektronen soll in verschiedenen Metallen verschieden und in jedem Metall Temperaturfunktion sein, so daß chemische und thermische Differenzen ein Konzentrationsgefälle und so eine eingeprägte elektrische Kraft $\mathfrak{E}^e$ hervorrufen. Andererseits sollen die freien Elektronen im Sinne der kinetischen Gastheorie Anteil an der Wärmebewegung haben, so daß ihr Transport im elektrischen Strome von einem Wärmestrom begleitet ist. Diese Vorstellung erklärt übrigens auch die merkwürdigen Beziehungen, welche zwischen der elektrischen und der thermischen Leitfähigkeit der Metalle bestehen. Es ist zu hoffen, daß die weitere Verfolgung der Elektronenhypothese auch sonst für die Theorie der Metalle fruchtbar sein wird; sie liegt indessen jenseits des Zieles, das sich der vorliegende Band gesteckt hat.

Das gleiche gilt von den räumlich verteilten eingeprägten Kräften $\mathfrak{E}^e$, welche man heranzuziehen hat, um die Erscheinungen

der Pyroelektrizität und Piezoelektrizität darzustellen. Diese in gewissen Kristallen bei Erwärmung bzw. Druck auftretenden Kräfte bestimmen zusammen mit der elektrostatischen Kraft der freien Ladungen hier keinen Leitungsstrom, sondern eine elektrische Verschiebung. Es mag beiläufig bemerkt werden, daß die Symmetrie der Kristalle, welche die genannten Erscheinungen aufweisen, im Einklange sind mit den Folgerungen, die man auf Grund kristallphysikalischer Grundsätze aus der polaren Art des elektrischen Vektors gezogen hat.

§ 52. Die Maßeinheiten und Dimensionen der elektrischen Größen.

Die bisherigen Entwicklungen sind noch unabhängig davon, wie man die Maßeinheiten für die in ihnen vorkommenden Größen wählen will. Dies geschieht in den verschiedenen elektrischen und magnetischen Maßsystemen in verschiedener Weise. Alle bisher aufgestellten Systeme aber beruhen auf dem Zentimeter-Gramm-Sekunde-System (C.-G.-S.) der Mechanik; die Krafteinheit ist also stets die Dyne, die Einheit der Energie das Erg. Bestimmen zwei elektrische Größen eine Kraftgröße oder eine Energiegröße, so ist durch Festlegung der Maßeinheit der einen elektrischen Größe auch die Einheit der anderen festgelegt. So haben wir bereits zu Beginn dieses Abschnittes (in § 26) darauf hingewiesen, daß die Gleichung (116), welche das Produkt aus wahrer Ladung e und Feldstärke $\mathfrak{E}$ einer Kraft gleichsetzt, nur die Wahl der Einheit der Ladung freiläßt; hat man über diese verfügt, so ist die Einheit von $\mathfrak{E}$ bestimmt. Aus (118a) folgt dann die Einheit, in der das Potential φ, aus (129) diejenige, in der die räumliche Dichte ϱ' der freien Elektrizität zu messen ist. Andererseits sind unmittelbar aus der für die wahre Ladung gewählten Einheit die Einheiten von $\mathfrak{D}$ durch (127), von J und damit von $\mathfrak{i}$ durch (151), bestimmt. Ferner sind durch (126), (152) Kapazität K und Gesamtwiderstand R als Quotienten aus wahrer Ladung und Potentialdifferenz bzw. aus Potentialdifferenz und Stromstärke definiert und durch (128), (152a) die Stoffkonstanten ε, σ.

Man kann nun an Stelle der Einheit der wahren Ladung e die Einheit der Dielektrizitätskonstanten ε offen lassen; diese beiden Größen sind miteinander durch das Coulombsche Gesetz verknüpft. Die verschiedenen Maßsysteme der elektrischen Größen werden sich also durch die für ε gewählte Einheit kennzeichnen lassen.

Das „elektrostatische Maßsystem“ betrachtet ε als reine Zahl, die für den leeren Raum gleich 1 gesetzt wird. Dieses System kann sich darauf berufen, daß im leeren Raume die Unterscheidung wahrer und freier Ladungen nicht notwendig ist; in der Tat haben wir im ersten Kapitel dieses Abschnittes, welches das Feld im Luftraume behandelte, nur von Elektrizität schlechtweg gesprochen. Die Unterscheidung von wahrer und freier Ladung, von Feldstärke und elektrischer Verschiebung wurde erst bei der Einführung dielektrischer Körper notwendig. Vom Standpunkte der Elektronentheorie, welche jedes Feld als Feld im Äther, jeden Strom entweder als Konvektionsstrom der Elektronen oder als Verschiebungsstrom im Äther betrachtet, erscheint es naturgemäß, wahre und freie Ladung durch dieselbe Einheit zu messen. Diese Einheit ist im elektrostatischen Systeme festgelegt als diejenige Ladung, welche eine ihr gleiche im Vakuum im Abstande von 1 cm mit der Kraft einer Dyne abstößt.

Wünscht man indessen in den auf beliebige Dielektrika bezüglichen Gleichungen den Unterschied von wahren und freien Ladungen kenntlich zu machen, so wird man es vorziehen, Einheit und Dimension von ε zunächst unbestimmt zu lassen und alle anderen Einheiten auf die vier Grundeinheiten der Länge, Masse, Zeit und Dielektrizitätskonstanten zu beziehen. Die Dimensionen von wahrer Ladung e und freier Ladung e' sind dann dadurch bestimmt, daß im Ausdrucke (140a) des Coulombschen Gesetzes beiderseits Größen von der Dimension einer Kraft stehen müssen. Die Dimension der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ folgt als Quotient von wahrer Ladung und Fläche, diejenige der Feldstärke $\mathfrak{E}$ als Quotient von freier Ladung und Fläche, das Potential φ und die elektromotorische Kraft E^e sind Produkte von $\mathfrak{E}$ und Längen. Die Stromstärke J ferner ist ein Quotient aus wah-

rer Ladung und Zeit, die Stromdichte $\mathfrak{i}$ ein Quotient aus Stromstärke und Fläche. Die Dimension von σ endlich ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz als Quotient von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{E}$ oder nach (158) als Quotient von ε und einer Zeitgröße. Wir stellen alle Dimensionen in der folgenden Tabelle zusammen:

Dimensionen der elektrischen Größen.	
Energie	$M\ L^2\ T^{-2}$,
Ponderomotorische Kraft	$M\ L\ T^{-2}$,
Wahre Elektrizitätsmenge e . . .	$M^{\frac{1}{2}}\ L^{\frac{3}{2}}\ T^{-1}\ \varepsilon^{\frac{1}{2}}$,
Freie Elektrizitätsmenge e' . . .	$M^{\frac{1}{2}}\ L^{\frac{3}{2}}\ T^{-1}\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$,
Elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ . . .	$M^{\frac{1}{2}}\ L^{-\frac{1}{2}}\ T^{-1}\ \varepsilon^{\frac{1}{2}}$,
Elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$	$M^{\frac{1}{2}}\ L^{-\frac{1}{2}}\ T^{-1}\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$,
Potential der freien Elektrizität φ	$M^{\frac{1}{2}}\ L^{\frac{1}{2}}\ T^{-1}\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$,
Elektrostatische Kapazität K . .	$L\ \varepsilon$
Stromstärke J.	$M^{\frac{1}{2}}\ L^{\frac{3}{2}}\ T^{-2}\ \varepsilon^{\frac{1}{2}}$,
Stromdichte $\mathfrak{i}$	$M^{\frac{1}{2}}\ L^{-\frac{1}{2}}\ T^{-2}\ \varepsilon^{\frac{1}{2}}$,
Spezifische Leitfähigkeit σ . . .	$T^{-1}\ \varepsilon$,
Elektrischer Widerstand R . . .	$L^{-1}\ T\ \varepsilon^{-1}$.

Streicht man in dieser Liste überall ε fort, so gelangt man zu den Dimensionen des elektrostatischen Maßsystemes, welches die elektrostatischen Größen auf Masse, Länge und Zeit als Grundeinheiten bezieht. Umgekehrt kann man die Dimension der Masse durch diejenigen der Elektrizität, Länge und Zeit folgendermaßen ausdrücken:

$$M = e^2 L^{-3} T^2;$$

die Einführung dieses Ausdruckes für M würde aus allen Dimensionsformeln die gebrochenen Exponenten fortschaffen, wofern ε im Sinne des elektrostatischen Systemes als reine Zahl betrachtet wird.

Dritter Abschnitt.

Das elektromagnetische Feld.

Erstes Kapitel.

Die magnetischen Vektoren.

§ 53. Die Analogie der elektrischen und der magnetischen Größen.

Schon die Vertreter der Fernwirkungstheorie haben bemerkt, daß die Elektrostatik und die Magnetostatik vielfach Analogien aufweisen und bisweilen eine durchaus übereinstimmende mathematische Behandlung gestatten. O. Heaviside, H. Hertz und E. Cohn haben sich bei ihrer Darstellung der Maxwellschen Theorie gleichfalls von der Analogie der elektrischen und der magnetischen Größen leiten lassen; sie haben den Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes eine Form gegeben, welche diese Beziehung deutlich hervortreten läßt. Dabei wird der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ die „magnetische Feldstärke“ $\mathfrak{H}$ gegenübergestellt, die „magnetische Induktion“ $\mathfrak{B}$ der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$. Demgemäß entspricht der räumlichen Dichte der wahren Elektrizität (ϱ), die gegeben ist durch

$$4\pi\varrho = \operatorname{div} \mathfrak{D},$$

die Dichte ϱ_m des „wahren Magnetismus“, für welche gilt

$$4\pi\varrho_m = \operatorname{div} \mathfrak{B};$$

der räumlichen Dichte der freien Elektrizität ϱ', gegeben durch

$$4\pi\varrho' = \operatorname{div} \mathfrak{E},$$

entspricht die Dichte ϱ'_m des „freien Magnetismus“, die sich bestimmt aus

$$4\pi\varrho'_m = \operatorname{div} \mathfrak{H}.$$

Der Dielektrizitätskonstanten ε entspricht die „magnetische

Permeabilität" μ, welche, durch die Gleichung $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ definiert, das magnetische Verhalten des betreffenden isotropen Körpers kennzeichnet. Diese Analogie führt auch zu einem Ausdrucke für die Energie des magnetischen Feldes. Die im Stücke dv des elektrischen Feldes enthaltene Energie beträgt

$$dU = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}\mathfrak{D})\,dv = \frac{\varepsilon}{8\pi}\,\mathfrak{E}^2 dv\,.$$

Diesem Ausdrucke der elektrischen Energie würde der Ausdruck

$$dT = \frac{1}{8\pi}\,(\mathfrak{H}\mathfrak{B})\,dv = \frac{\mu}{8\pi}\,\mathfrak{H}^2 dv$$

für die im Stücke dv enthaltene magnetische Energie entsprechen. Die Integration über den Raum ergibt

$$T = \int dv\,\frac{1}{8\pi}\,(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) \tag{162}$$

als Energie des magnetischen Feldes.

So nützlich es nun bisweilen ist, die soeben erwähnte Analogie zu verfolgen, so darf doch nicht verschwiegen werden, daß manche wesentliche Unterschiede zwischen den elektrischen und den magnetischen Größen bestehen. Zunächst lehrt die Erfahrung, daß es nicht möglich ist, eine Menge von positivem oder negativem wahren Magnetismus zu isolieren. In jedem Körper ist der gesamte Magnetismus gleich Null und ebenso in jedem Stücke eines Körpers. Wahrer Magnetismus kommt in der Natur überhaupt nicht vor. Das Feld des Vektors $\mathfrak{B}$ ist demnach stets ein quellenfreies Feld, der magnetische Induktionsfluß durch eine jede geschlossene Fläche ist stets gleich Null.

Mit dem Fehlen des magnetischen Gegenstückes der wahren Elektrizität ist das Fehlen magnetischer Leiter eng verknüpft. Es wären dies, gemäß der elektrischen Analogie, solche Körper, in denen das Bestehen eines magnetischen Feldes von dauernder Wärmeentwickelung begleitet wäre. Solche magnetischen Leiter gibt es in der Natur nicht. Es entfällt daher auch der Begriff der magnetischen Leitfähigkeit.

Die magnetische Permeabilität μ entspricht insofern ihrem elektrischen Gegenstücke, der Dielektrizitätskonstanten, als sie

ebenfalls einem und demselben Grenzwerte zustrebt, wenn man ein mit einem beliebigen Gase gefülltes Gefäß auspumpt. Den Grenzwert bezeichnet man als Permeabilität des leeren Raumes oder des „Äthers“. Die Nahewirkungstheorie sieht auch den leeren Raum als Sitz eines magnetischen Feldes, als Speicher magnetischer Energie an. Es liegt nahe, den leeren Raum gewissermaßen als Normalsubstanz zu wählen und den Zahlwert seiner Permeabilität gleich 1 zu setzen, ebenso wie wir die Dielektrizitätskonstante des Äthers gleich 1 gesetzt haben (§ 33).

Bezieht man die Permeabilitäten der Körper auf diese Einheit, so tritt wiederum eine Lücke der elektrisch-magnetischen Analogie zutage. Neben den *paramagnetischen* Körpern, deren Permeabilität größer als 1 ist, die mithin den dielektrischen Körpern entsprechen, gibt es andere, deren Permeabilität etwas geringer ist als 1, die *diamagnetischen* Körper. Ferner ist das Verhalten der *ferromagnetischen Metalle* bemerkenswert, deren Permeabilität nicht nur sehr groß ist — bei weichem Schmiedeeisen unter Umständen einige tausendmal so groß als für das Vakuum —, sondern für ein und dasselbe Material sich in sehr weiten Grenzen zu ändern vermag. Die ferromagnetischen Körper zeigen außerdem bei geeigneter Behandlungsweise die eigentümliche Erscheinung des *permanenten Magnetismus*, welche der Theorie noch heute bedeutende Schwierigkeiten bietet, obwohl sie zuerst zur Entdeckung der magnetischen Felder geführt hat.

Neben der soeben erörterten Analogie der elektrischen und magnetischen Größen hat noch eine zweite Art der Gegenüberstellung der elektrischen und magnetischen Vektoren Interesse. Vergleicht man das elektrostatische Feld elektrischer Ladungen mit dem magnetischen Felde stationärer elektrischer Ströme, so findet man, daß das erstere ein Quellenfeld, das letztere ein Wirbelfeld ist; die Ladungen sind der Sitz der Quellen des Vektors $\mathfrak{D}$, die elektrischen Ströme der Sitz der Wirbel des Vektors $\mathfrak{H}$; ferner ist im elektrostatischen Felde $\mathfrak{E}$ wirbelfrei, im magnetischen Felde dagegen ist $\mathfrak{B}$ quellenfrei. Hiernach würden einander die Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ einerseits, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ andererseits zuzuordnen

sein, in dem Sinne, in welchem Quellenfeld und Wirbelfeld einander entsprechen. Auch diese Zuordnung der elektrischen und magnetischen Größen wird im folgenden zu erörtern sein.

§ 54. Die magnetische Induktion.

Zur Untersuchung eines magnetischen Feldes bedienen wir uns einer Probespule; wir nehmen der Einfachheit wegen an, daß dieselbe nur aus einer einzigen Drahtwindung besteht, daß die Leitlinie des Drahtes eine geschlossene ebene Kurve ist, und daß die Abmessungen der umschlossenen Fläche f groß gegen den Radius des Drahtquerschnittes sind. Wir denken uns die Spule an einem Orte befindlich, an dem anfangs kein magnetisches Feld vorhanden war. Nun erregen wir ein solches Feld, etwa durch Heranbringen eines Magneten oder eines elektrischen Stromes, oder auch durch Schließen eines Stromes in einer benachbarten Leitung. Dann beginnt in der Probespule ein Strom J zu fließen. Ohne uns nun um den zeitlichen Verlauf dieses Stromes zu kümmern, warten wir, bis J gleich Null geworden ist; alsdann bestimmen wir, etwa mit Hilfe eines Voltameters, die Elektrizitätsmenge e, welche im ganzen infolge der Erregung des weiterhin konstant zu haltenden Magnetfeldes die Spule durchflossen hat.

Wir denken uns den Gesamtwiderstand R der Spule gegeben, ebenso den Flächeninhalt f der umschlossenen ebenen Fläche. Wir ordnen ferner dem Sinne, in dem die Elektrizität die Spule durchströmt hat, mit Hilfe einer Rechtsschraube eine zu f senkrechte Richtung n zu.

Die Gleichung

$$-\mathfrak{B}_n = c \cdot \frac{Re}{f}, \tag{163}$$

in der c einen von den Maßeinheiten abhängigen universellen Faktor bedeutet, bestimmt die nach der Richtung n genommene Komponente eines Vektors $\mathfrak{B}$. Diesen Vektor bezeichnen wir als die „magnetische Induktion" des erregten stationären Magnetfeldes. Diese Bezeichnung gilt selbstverständlich strenge nur für gleichförmige Felder; für ungleichförmige Felder ergibt

die rechte Seite von (163) nur einen über die Fläche f genommenen Mittelwert von $\mathfrak{B}_n$; wir müssen demnach, um jene Beziehung aufrechtzuerhalten, die Einschränkung hinzufügen: es sind die Abmessungen der Spulenfläche f so klein zu wählen, daß das magnetische Feld auf ihr als merklich gleichförmig anzusehen ist.

Eine ähnliche Einschränkung bezüglich der Abmessungen des Probekörpers mußten wir in Kauf nehmen, als wir die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ mit Hilfe einer elektrisch geladenen Probekugel ermittelten; eine Einsicht in die Gesetze des elektrostatischen Feldes, die jenem Verfahren zugrunde lagen, ergab sich erst im Laufe der weiteren Betrachtungen. Ebenso müssen wir hier die genauere Erörterung der Gesetze der induzierten Ströme, auf denen die Gleichung (163) beruht, einem späteren Kapitel vorbehalten (vgl. § 66). Die Festsetzungen dieses Paragraphen sollen zunächst nur dazu dienen, die Bedeutung und den Namen des Vektors $\mathfrak{B}$ zu erläutern.

Die obige Definition des Vektors $\mathfrak{B}$ beruht auf dem Faradayschen Induktionsgesetze. Dieses Gesetz führt (vgl. § 66) zu einer ähnlichen Beziehung für beliebige geschlossene lineare Leiter. Die Elektrizitätsmenge, welche einen solchen Leiter beim Erregen des Magnetfeldes durchströmt, wird nach dem Induktionsgesetze durch die Gleichung gegeben

$$-\int \mathfrak{B}_n df = cRe. \tag{164}$$

Gemäß der in (163) enthaltenen Festsetzung sagt diese Gleichung folgendes aus: Man nehme irgendeine von dem linearen Leiter begrenzte Fläche, zerlege diese in kleine Flächenstücke df, auf denen das magnetische Feld als merklich gleichförmig zu betrachten ist, denke sich diese Flächenstücke von Probespulen von gegebenem Widerstande begrenzt und summiere nach Festlegung eines bestimmten Umlaufssinnes die Produkte aus dem Widerstande der betreffenden Probespule und der bei Erregung des Feldes hindurchströmenden Elektrizitätsmenge. Die Summe dieser Produkte ist dem Produkte aus Widerstand und hindurch-

geflossener Elektrizitätsmenge für den ursprünglichen linearen Leiter gleich.

Man kann sich das mit Hilfe der Probespule ermittelte Feld $\mathfrak{B}$ als Strömungsfeld veranschaulichen; die Normalkomponente von $\mathfrak{B}$, integriert über eine Fläche, ergibt dann die gesamte Strömung durch die Fläche; man nennt es darum den Induktionsfluß durch diese Fläche. Der Induktionsfluß durch die von einem linearen Leiter berandete Fläche ist es, der in (164) eingeht.

Nun ist die rechte Seite der Gleichung (164) von der Fläche f unabhängig. Betrachten wir verschiedene Flächen, die alle von der Leitlinie eines und desselben Drahtes umschlossen sind, so muß der Induktionsfluß für alle diese Flächen der gleiche sein. Der Induktionsfluß, der aus einer geschlossenen Fläche heraustritt, ist also stets gleich Null. Das Feld des Vektors $\mathfrak{B}$ ist somit überall quellenfrei; es gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 . \tag{165}$$

Wir haben bereits hier in ungezwungener Weise das Fehlen des wahren Magnetismus in die Theorie eingeführt. Wir gingen dabei von einem unmagnetischen Zustande des betreffenden Körpers aus und dachten uns ein stationäres Magnetfeld erregt. Hat man es mit einem Felde im Innern permanenter Magnete zu tun, so kann die Anwendbarkeit der Betrachtungen auf den ersten Blick fraglich erscheinen, da hier anscheinend kein unmagnetischer Anfangszustand vorliegt. Immerhin ist die Annahme zulässig, daß ein solcher Zustand einmal vorhanden war. Denkt man sich im Innern eines ferromagnetischen Metalles einen engen Kanal gebohrt, in den die Probespule bzw. der lineare Leiter gebracht wird, und die Elektrizitätsmengen gemessen, die von dem Zeitpunkte des unmagnetischen Zustandes an bis zu dem gegenwärtigen Zeitpunkte der permanenten Magnetisierung hindurchgeströmt sind, so kann man auch hier die obige Bestimmung des Vektors $\mathfrak{B}$ anwenden, die ihn als quellenfreien Vektor einführt. Auch im Innern permanenter Magnete werden wir daher wahren Magnetismus nicht annehmen.

Wie wir durch Untersuchung des elektrostatischen Feldes mit

Hilfe des Probekörpers zunächst das Feld des Vektors $\mathfrak{E}$ konstruierten, so führt uns die Probespule zunächst auf den Vektor $\mathfrak{B}$. Insofern entspricht der Vektor $\mathfrak{B}$ der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$. Während aber der Vektor $\mathfrak{E}$ im elektrostatischen Felde wirbelfrei war, ist $\mathfrak{B}$ — und zwar allgemein — quellenfrei. Wie $\mathfrak{E}$ als wirbelfreier Vektor vom elektrostatischen Potentiale, so leitet sich $\mathfrak{B}$ als quellenfreier Vektor von einem Vektorpotentiale $\mathfrak{A}$ ab:

$$\mathfrak{B} = \text{curl}\, \mathfrak{A}\,. \tag{165a}$$

Hiernach darf man bei stationären Feldern die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ einander zuordnen in demselben Sinne, in dem wir im ersten Abschnitte (vgl. § 21) das wirbelfreie und das quellenfreie Vektorfeld einander gegenüberstellten.

§ 55. Die magnetische Feldstärke.

Wir haben im ersten Abschnitte dieses Buches gezeigt, daß ein den ganzen Raum quellenfrei füllendes Feld durch seine Wirbel bestimmt ist (vgl. § 21). Es liegt daher nahe, nach den Wirbeln des Vektors $\mathfrak{B}$ zu fragen, ebenso wie im zweiten Abschnitte dieses Buches die Frage nach den Quellen des Feldes $\mathfrak{E}$ auftrat. Ein einfacher Zusammenhang zwischen der Divergenz von $\mathfrak{E}$ und der wahren Elektrizität lag nur für das Feld im leeren Raume vor; waren dielektrische Körper im Felde, so bestimmte sich die Divergenz von $\mathfrak{D}$, nicht diejenige von $\mathfrak{E}$, durch die Dichte der wahren Elektrizität. Untersuchen wir nun die Umgebung eines stromführenden Drahtes in der im vorigen Paragraphen angegebenen Weise mit einer Probespule, so finden wir nur im leeren Raume einen allgemeingültigen Zusammenhang zwischen dem Felde $\mathfrak{B}$ und dem elektrischen Leitungsstrome: es ist der Vektor $\mathfrak{B}$ in dem stromlosen Gebiete wirbelfrei; seine Wirbel haben ausschließlich in den stromdurchflossenen Leitern ihren Sitz und sind der Stromdichte proportional. Sind aber paramagnetische oder diamagnetische Körper im Felde, so fällt dieser einfache Zusammenhang fort. Es empfiehlt sich dann, einen zweiten magnetischen Vektor $\mathfrak{H}$ einzuführen, den wir „magnetische

Feldstärke" oder auch „magnetische Kraft" nennen wollen; dessen Wirbel soll stets in dem elektrischen Strome seinen Sitz haben.

Denken wir uns einen geschlossenen linearen Leiter von einem konstanten Strome J durchflossen, so ist der Vektor $\mathfrak{H}$ folgendermaßen zu bestimmen. Für jede den Leiter einmal umschlingende Kurve $\mathfrak{s}$ soll das Linienintegral von $\mathfrak{H}$ der Stromstärke J proportional sein:

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \frac{4\pi J}{c}, \tag{166}$$

für jede den Stromleiter nicht umschlingende Kurve aber soll das Linienintegral gleich Null sein. — Die in (166) auftretende universelle Konstante c ist bereits in (163) eingeführt worden; sie hängt in einer später genauer zu erörternden Weise von den Einheiten ab, in denen J und $\mathfrak{H}$ gemessen werden. Der Umlaufsinn längs $\mathfrak{s}$ soll der Strömungsrichtung der Elektrizität sich zuordnen, wie der Umlaufsinn der Fortschreitungsrichtung bei einer Rechtsschraube.

Der diesen Bedingungen genügende Vektor $\mathfrak{H}$ ist nun — das besagt das zugrunde zu legende Erfahrungsgesetz — dem Vektor $\mathfrak{B}$ der magnetischen Induktion proportional. Es gilt

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \tag{167}$$

für isotrope Körper.

Die hier auftretende Stoffkonstante μ soll, wie erwähnt, für den Äther gleich 1 gesetzt werden.

Verbinden wir mit diesen Aussagen den Ansatz (162) für die magnetische Energie, so haben wir das magnetische Feld eines linearen, von einem stationären Strome durchflossenen Leiters erschöpfend gekennzeichnet. Schließen wir ferromagnetische Körper aus, in denen μ nicht konstant ist, so sind die Gleichungen (165), (166), (167) alle linear; es überlagern sich demnach die Felder verschiedener Stromleiter.

Der für die Energie des magnetischen Feldes zugrunde gelegte Ansatz (162) machte es notwendig, in die Beziehung zwischen J und $\mathfrak{H}$ (166) dieselbe von den Maßeinheiten abhängige Kon-

stante c aufzunehmen, die in der Definitionsgleichung (163) des Vektors $\mathfrak{B}$ auftrat. Denn die Energie des magnetischen Feldes eines Stromleiters muß offenbar unabhängig von der Wahl der Einheit sein, in der die Stromstärken gemessen werden, wenn anders diese Wahl mit dem absoluten C.-G.-S.-System verträglich ist. Soll das skalare Produkt von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ von der Wahl der Maßeinheiten unabhängig sein, so muß der Faktor c bei der Multiplikation sich herausheben, da ReJ von der Dimension einer Energie, mithin seinerseits von der Wahl des Maßsystems unabhängig ist.

Wir denken uns den ganzen Raum von einem Stoffe konstanter magnetischer Permeabilität erfüllt. Für diesen besonderen Fall können wir das magnetische Feld eines linearen Leiters ohne weiteres bestimmen. In diesem Falle folgt nämlich aus (165) und (167)

$$\operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = \mu \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0,$$

es ist also nicht nur $\mathfrak{B}$, sondern auch $\mathfrak{H}$ durchweg quellenfrei verteilt. Wir haben es daher mit dem quellenfreien Felde einer einzigen Wirbellinie zu tun, deren Eigenschaften uns durch die Entwickelungen des § 24 bekannt sind. Dem Momente $4\pi\mathfrak{r}$ der Wirbellinie entspricht hier der Ausdruck $4\pi \frac{J}{c}$, so daß die Gleichung (110) ergibt

$$\mathfrak{H} = \frac{J}{c} \oint \frac{1}{r^3} [d\mathfrak{s}\mathfrak{r}]. \tag{168}$$

Dies ist das magnetische Feld einer geschlossenen Stromlinie.

Wir können den Ausdruck als Summe der Beiträge deuten, die von den einzelnen Stromstücken $Jd\mathfrak{s}$ zur Feldstärke in dem betreffenden Aufpunkte beigesteuert werden und die sich aus dem Biot-Savartschen Elementargesetze bestimmen. Aber hier, wie auch in § 24, ist zu bemerken, daß die Zerlegung einigermaßen willkürlich ist; die Stromstücke können einzeln nicht bestehen; wir haben es vielmehr mit einem geschlossenen, von einem stationären Strome durchflossenen Leitungsdrahte zu tun und haben nach der Maxwellschen Theorie dessen Feld als Ganzes zu betrachten.

Was nun das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ anbelangt, so empfiehlt es sich, mit Maxwell dieses Vektorpotential der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ zuzuordnen gemäß Gleichung (165a). In dem jetzt in Rede stehenden Falle einer überall gleichen Permeabilität ist zwar auch $\mathfrak{H}$ quellenfrei und daher als Curl eines Vektorpotentiales darzustellen; aber auf den allgemeinen Fall eines von Körpern verschiedener Permeabilität erfüllten Raumes würde sich eine solche Beziehung nicht ausdehnen lassen. Wir setzen daher

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = \operatorname{curl} \frac{\mathfrak{A}}{\mu}$$

und erhalten durch Vergleichung mit (109)

$$\mathfrak{A} = \mu \frac{J}{c} \oint \frac{d\mathfrak{s}}{r} \tag{168a}$$

als Vektorpotential der Stromlinie.

Für das magnetische Feld elektrischer Ströme gibt uns die Erfahrung zunächst nur Integralgesetze. Wir gelangen auch hier, wie beim Ohmschen Gesetze, zu den für die weitere theoretische Behandlung zweckmäßigeren Differentialgesetzen, indem wir zu unendlich kleinen Gebietsteilen übergehen.

Die Gleichung (166) ergibt

$$\oint d\mathfrak{s}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \int \mathfrak{i}_n df,$$

wo f eine beliebige, von der Kurve $\mathfrak{s}$ umrandete Fläche ist und $\mathfrak{i}_n$ die Dichte der das Stück df dieser Fläche senkrecht durchfließenden Strömung.

Ziehen wir nun die Kurve $\mathfrak{s}$ mehr und mehr zusammen, so ergibt nach § 20 die linke Seite den Curl von $\mathfrak{H}$; es wird

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{i}. \tag{169}$$

Dieses differentielle Verknüpfungsgesetz von Leitungsstrom und magnetischem Felde wollen wir als erste Hauptgleichung des Elektromagnetismus bezeichnen. Ihm zufolge haben die Wirbel des Vektors $\mathfrak{H}$ ausschließlich in den elektrisch durchströmten Leitern ihren Sitz, während im Isolator, solange als das magnetische Feld sich nicht

zeitlich ändert, der Wirbel des magnetischen Feldes überall gleich Null ist.

Beschränken wir uns wiederum auf den Fall einer durchweg konstanten Permeabilität, so können wir das magnetische Feld eines vollständigen Stromsystemes in ganz entsprechender Weise ableiten, wie wir im § 21 des ersten Abschnittes das quellenfreie Vektorfeld bei gegebener Wirbelverteilung bestimmt haben.

Es ist
$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$

und diese Gleichung zusammen mit (169) entspricht durchaus den Gleichungen (96) des § 21. Wir haben nur dort $\mathfrak{i}/c$ an Stelle von $\mathfrak{r}$ zu schreiben und ferner, da

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl} \frac{\mathfrak{A}}{\mu}$$

gesetzt werden soll, $\frac{\mathfrak{A}}{\mu}$ an Stelle von $\mathfrak{A}$. Dann ergibt Gleichung (100)

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu}{c} \int \frac{dv\,\mathfrak{i}}{r}; \tag{170}$$

aus diesem Vektorpotential leiten sich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ folgendermaßen ab:

$$\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \mathfrak{B} = \frac{1}{\mu} \operatorname{curl} \mathfrak{A}. \tag{170a}$$

Hierdurch ist die vorgelegte Aufgabe gelöst. Es folgt übrigens aus den Entwicklungen des § 21, daß $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ verschwindet, wenn die Integration über das ganze von Elektrizität durchströmte Gebiet erstreckt wird.

Ganz ähnlich, wie wir im § 21 die Energie des quellenfreien Vektorfeldes durch ein über die Wirbel erstrecktes Integral darstellten, so können wir die magnetische Energie (162) eines beliebigen elektrischen Stromsystemes durch ein über das stromerfüllte Gebiet erstrecktes Integral ausdrücken. Nach (162) und (165a) ist die magnetische Energie

$$T = \frac{1}{8\pi} \int dv (\mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{A}).$$

Die Rechnungsregel (102) ergibt

$$\mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \operatorname{div} [\mathfrak{H}\mathfrak{A}],$$

daher $$T = \frac{1}{8\pi}\int dv(\mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{H}) - \frac{1}{8\pi}\int dv \operatorname{div} [\mathfrak{H}\mathfrak{A}].$$

Die Anwendung des Gaußschen Satzes bringt das letzte Glied

auf die Form $$-\frac{1}{8\pi}\int df\,[\mathfrak{H}\mathfrak{A}]_n;$$

läßt man die Begrenzungsfläche des Feldes in das Unendliche rücken, so verschwindet dieses Integral für ein jedes im Endlichen liegende Stromsystem, und es wird nach (169)

$$T = \frac{1}{2c}\int dv(\mathfrak{i}\mathfrak{A}). \tag{170b}$$

Diese Umformung des Energieausdruckes (162) ist von der Annahme durchweg konstanter Permeabilität unabhängig. Sie beruht nur auf der ersten Hauptgleichung (169) und der durch (165) ausgedrückten Eigenschaft des Vektors $\mathfrak{B}$, überall quellenfrei zu sein, einer Eigenschaft, die wir auch dem Felde im Innern permanenter Magnete zugeschrieben haben. Lassen wir die elektrischen Ströme verschwinden, so verschwindet auch die rechte Seite des umgeformten Energieausdruckes (170b). Hiernach wäre die Energie eines permanenten Magneten gleich Null, wenn kein elektrischer Strom ihn durchfließt. Dieses Ergebnis ist mit der Erfahrung nicht verträglich. Wir können die Überlegung auch direkt an den Satz des § 23 anknüpfen: Das über den ganzen Raum erstreckte Integral des inneren Produktes aus einem quellenfreien und einem wirbelfreien Vektor ist Null. In der Tat, nehmen wir allgemein

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

an und setzen für das Innere eines nicht von elektrischen Strömen durchflossenen Magneten nach (169)

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 0,$$

so folgt aus jenem Satze, daß die nach der Formel (162) berechnete Energie des Magneten gleich Null ist. Da wir nun den Vektor $\mathfrak{H}$ so bestimmt haben, daß seine Wirbel durch den wahren elektrischen Strom bedingt sind, so bleibt uns nichts anderes übrig, als für ferromagnetische Körper den Energie-

ansatz (162) aufzugeben. Das wird in der Tat bei der Behandlung dieser Körper im vierten Abschnitte dieses Bandes geschehen.

Der ursprüngliche Ansatz (162) für die magnetische Energie betrachtet, den Vorstellungen der Nahewirkungstheorie gemäß, das ganze Feld als Sitz der Energie. Es ist bemerkenswert, daß der umgeformte Ausdruck (170b), der für stationäre elektrische Ströme denselben Energiebetrag ergibt, eine der Fernwirkungstheorie entsprechende Deutung zuläßt, indem die Energie als über die Stromfäden verteilt erscheint. Für die magnetische Energie stationärer Ströme ergeben in der Tat Nahewirkungstheorie und Fernwirkungstheorie den gleichen Wert. Die Vorzüge des Maxwellschen Energieausdruckes treten erst bei rasch veränderlichen Feldern hervor.

§ 56. Der freie Magnetismus und das skalare Potential eines magnetisierten Körpers.

Ein gegebenes System elektrischer Ströme mag im leeren Raume ein magnetisches Feld erregen, dessen magnetische Feldstärke mit $\mathfrak{H}_0$, dessen magnetische Induktion mit $\mathfrak{B}_0$ bezeichnet werde. Nach (170), (170a) hat man

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{B}_0 = \operatorname{curl} \mathfrak{A}_0$$

und

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{1}{c}\int dv \, \frac{\mathfrak{i}}{r}, \tag{171}$$

daher

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{B}_0 = \frac{1}{c}\int \frac{dv}{r^3}[\mathfrak{i}\mathfrak{r}], \tag{171a}$$

wo $\mathfrak{r}$ den von dem betreffenden Punkte des Stromleiters nach dem Aufpunkte hin gezogenen Fahrstrahl bezeichnet.

Wir denken uns in dem Felde ein stromloses Gebiet abgegrenzt und in dieses Körper gebracht, deren magnetische Permeabilität μ von 1 verschieden ist. Es kann μ von Punkt zu Punkt sich stetig ändern, sei es infolge der Inhomogenität des betreffenden Körpers, sei es, weil in ferromagnetischen Körpern die Permeabilität von der Feldstärke abhängt. Es können aber auch an der

Trennungsfläche verschiedener Körper sprungweise Änderungen von μ vorkommen. Es wird sich nach Einführung jener Körper ein Feld herstellen, dessen Feldstärke $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{H}_0$ und dessen Induktion $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{B}_0$ verschieden sind. Wir stellen uns die Aufgabe, die Felder dieser Vektoren zu untersuchen.

Nun muß, unseren Grundannahmen zufolge, wie in jedem Felde, so auch hier das Integral der normalen Komponente der Induktion für jede geschlossene Fläche gleich Null sein. Es muß also nicht nur überall die räumliche Divergenz, sondern auch an den Trennungsflächen verschiedener Körper die Flächendivergenz (§ 17) von $\mathfrak{B}$ verschwinden. Daraus folgt: *die Normalkomponente von $\mathfrak{B}$ durchsetzt stetig die Trennungsfläche zweier verschiedener Körper.*

Da ferner das zu betrachtende Gebiet des Feldes stromlos ist, so muß das Linienintegral von $\mathfrak{H}$ für jede in dem Gebiete verlaufende geschlossene Kurve verschwinden. Es ist also nicht nur überall

$$\text{curl}\,\mathfrak{H} = 0\,, \tag{172}$$

sondern außerdem ist an den Trennungsflächen verschiedener Körper der Flächenwirbel (§ 22) von $\mathfrak{H}$ gleich Null. Daraus folgt: *die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{H}$ durchsetzen stetig die Trennungsflächen zweier verschiedener Körper.*

Vergleicht man das in Rede stehende stromlose Gebiet des konstanten magnetischen Feldes mit dem von wahrer Elektrizität freien Gebiete eines elektrostatischen Feldes, so bemerkt man, daß hier die Heaviside-Hertzsche Analogie (§ 53) sich durchführen läßt. Der Gleichung

$$\text{div}\,\mathfrak{B} = 0 \qquad \text{entspricht} \qquad \text{div}\,\mathfrak{D} = 0\,,$$

der Gleichung

$$\text{curl}\,\mathfrak{H} = 0 \qquad \text{entspricht} \qquad \text{curl}\,\mathfrak{E} = 0\,.$$

Auch in den Grenzbedingungen entsprechen sich die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, deren Tangentialkomponenten, und die Vektoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, deren Normalkomponenten stetig sein müssen. Man kann daher das im § 35 abgeleitete Brechungsgesetz der elektrischen Kraftlinien

unmittelbar auf die magnetischen Kraftlinien übertragen. In der Tat, sind α_1, α_2 die Winkel, welche die magnetischen Vektoren zu beiden Seiten der Trennungsfläche mit einer der Flächennormalen einschließen, so hat man

$$|\mathfrak{B}_1| \cos \alpha_1 = |\mathfrak{B}_2| \cos \alpha_2, \qquad |\mathfrak{H}_1| \sin \alpha_1 = |\mathfrak{H}_2| \sin \alpha_2,$$

daher

$$\text{(172a)} \qquad \operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \mu_1 : \mu_2 .$$

Daß hier die Analogie sich vollständig durchführen läßt, liegt an den besonderen Voraussetzungen, die wir einführten. Verschwindet die wahre Elektrizität, so ist $\mathfrak{D}$ quellenfrei, wie $\mathfrak{B}$ es stets ist; verschwindet der elektrische Strom, so ist $\mathfrak{H}$ wirbelfrei, wie es $\mathfrak{E}$ im Falle des elektrischen Gleichgewichtes ist. Obwohl nun bei einer allgemeineren Problemstellung die Analogie versagt, so wird es doch nützlich sein, sich gerade im vorliegenden Falle von ihr leiten zu lassen.

Das wirbelfreie Feld $\mathfrak{H}$ wird bestimmt sein, wenn man die Verteilung seiner Quellen kennt. Man setze die räumliche Divergenz von $\mathfrak{H}$ gleich $4\pi\varrho'_m$, die Flächendivergenz an den Trennungsflächen verschiedener Körper gleich $4\pi\omega'_m$. Es gibt dann ϱ'_m die räumliche Dichte, ω'_m die Flächendichte des freien Magnetismus an.

Freier Magnetismus tritt nur dort auf, wo μ sich ändert. Denn an der Trennungsfläche zweier Körper derselben Permeabilität wäre die Flächendivergenz von $\mathfrak{H}$ derjenigen von $\mathfrak{B}$ proportional, die stets gleich Null ist. Und für das Innere der Körper folgt aus dem Verschwinden der Divergenz von $\mathfrak{B}$

$$0 = \operatorname{div} \mathfrak{B} = \operatorname{div} \mu\mathfrak{H} = \mu \operatorname{div} \mathfrak{H} + (\mathfrak{H}\nabla\mu), \qquad \text{daher}$$

$$\text{(172b)} \qquad 4\pi\varrho'_m = \operatorname{div} \mathfrak{H} = -\frac{1}{\mu}(\mathfrak{H}\nabla\mu).$$

Es tritt demnach nur dort freier Magnetismus auf, wo die Permeabilität einen Gradienten besitzt, d. h. in inhomogenen oder in ferromagnetischen Körpern und an der Grenzfläche zweier Körper verschiedener Permeabilität.

Da das durch das Hereinbringen der Körper veränderte Feld

$\mathfrak{H}$ von denselben Strömen erregt ist wie das ursprüngliche Feld $\mathfrak{H}_0$, so ist $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$ wirbelfrei. Da aber $\mathfrak{H}_0$ keine Quellen besitzt, sondern nur Wirbel, so liegen die Quellen von $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$, wie diejenigen von $\mathfrak{H}$, nur in den hereingebrachten Körpern, nämlich dort, wo sich freier Magnetismus befindet. Das skalare Potential des Feldes $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$ ist daher

$$\varphi_m = \int \frac{dv\,\varrho'_m}{r} + \int \frac{df\,\omega'_m}{r}, \tag{172c}$$

entsprechend der Formel (130a) für das skalare Potential des elektrostatischen Feldes. Kennen wir also die Verteilung des freien Magnetismus, so sind wir vermöge der Gleichung

$$\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0 = -\nabla \varphi_m \tag{172d}$$

imstande, anzugeben, wie durch Hereinbringen der Körper in das stromlose Gebiet das magnetische Feld geändert ist; und zwar beziehen sich die Formeln sowohl auf das Feld außerhalb wie auf das Feld innerhalb der hereingebrachten para-, dia- oder ferromagnetischen Körper.

Wir können den Ausdruck für das skalare Potential des von diesen Körpern erregten Feldes $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$ auf eine Form bringen, welche der im § 38 für das Potential eines Dielektrikums erhaltenen entspricht und eine entsprechende Deutung gestattet. Wir wollen bei der Umformung die Veränderungen der Permeabilität im Innern des betrachteten Körpersystemes als stetig ansehen und Unstetigkeiten nur an der Trennungsfläche gegen den Äther zulassen. Wir führen einen neuen Vektor $\mathfrak{M}$ ein, den wir durch die Gleichung

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi}\{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}\} \tag{173}$$

definieren und als „Magnetisierung" bezeichnen. Er entspricht dem im § 38 eingeführten Vektor $\mathfrak{P}$ der elektrischen Polarisation. Wir können schreiben

$$\mathfrak{M} = \varkappa \mathfrak{H}, \tag{173a}$$

wo

$$\varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}$$

die „magnetische Suszeptibilität" genannt wird. Im leeren

Raume ist die Suszeptibilität wie die Magnetisierung Null. Einen Körper, in dem der Vektor $\mathfrak{M}$ von Null verschieden ist, bezeichnet man als magnetisiert.

Da $\mathfrak{B}$ durchweg quellenfrei ist, so folgt aus (173)

$$\varrho_m' = -\operatorname{div}\mathfrak{M}, \tag{173b}$$

$$\omega_m' = \mathfrak{M}_n, \tag{173c}$$

wo n die von der Begrenzungsfläche der magnetischen Körper nach außen (nach dem Äther hin) gezogene Normale bezeichnet. Das Potential (172c) des magnetisierten Körpers wird jetzt

$$\varphi_m = -\int \frac{dv \operatorname{div}\mathfrak{M}}{r} + \int \frac{df\,\mathfrak{M}_n}{r}.$$

Das Flächenintegral mit Hilfe der aus dem Gaußschen Satze abgeleiteten Gleichung (66) umformend, erhalten wir für φ_m ein über den magnetisierten Körper zu erstreckendes Integral

$$\varphi_m = \int dv \left(\mathfrak{M}\nabla_q \frac{1}{r}\right). \tag{173d}$$

Dieser Ausdruck für das skalare Potential eines magnetisierten Körpers entspricht durchaus dem in Formel (134c) des § 38 für das Potential eines dielektrisch polarisierten Körpers abgeleiteten. Wir können ihn in entsprechender Weise deuten, indem wir den Körper in kleine Stücke zerlegt denken und jedes Stück als Träger einer Doppelbelegung von freiem Magnetismus ansehen. Durch Zusammensetzung der Felder aller magnetisierten Stücke ergibt sich der Ausdruck (173d), welcher sich bei Vertauschung von Quellpunkt- und Aufpunktgradienten (vgl. § 15, Gl. 78) auch schreiben läßt

$$\varphi_m = -\int dv \left(\mathfrak{M}\nabla_a \frac{1}{r}\right).$$

Es folgt gemäß (172d)

$$\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0 = -\nabla_a \varphi_m = \nabla_a \int dv \left(\mathfrak{M}\nabla_a \frac{1}{r}\right), \tag{173e}$$

ein Ausdruck, der das Feld des magnetisierten Körpers sowohl innerhalb wie außerhalb richtig angibt. Nach den Koordinatenachsen zerlegend und die durch ∇_a angedeuteten Ableitungen nach den Koordinaten xyz des Aufpunktes ausführend, erhält man

$$(173f)\begin{cases} \mathfrak{H}_x - \mathfrak{H}_{0x} = \int dv \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \right\}, \\ \mathfrak{H}_y - \mathfrak{H}_{0y} = \int dv \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} \right\}, \\ \mathfrak{H}_z - \mathfrak{H}_{0z} = \int dv \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial x} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial y} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right\}. \end{cases}$$

Da $\mathfrak{H}_0$ durch (171a) gegeben ist, so bestimmt sich, wenn $\mathfrak{M}$ bekannt ist, hieraus das Feld $\mathfrak{H}$, und vermöge

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

dann auch die magnetische Induktion im Innern des magnetisierten Körpers. Die rechnerische Ermittelung der Magnetisierung eines Körpers in einem gegebenen Felde ist allerdings meist keine einfache Aufgabe.

Für eine in ein gleichförmiges Feld $\mathfrak{H}_0$ gebrachte Kugel läßt sich die Magnetisierung und das Feld bestimmen, genau so wie im § 39 das entsprechende elektrostatische Problem gelöst wurde. Man findet (Gl. 137), daß die entstehende Magnetisierung der Kugel gleichförmig ist, und den Wert hat

$$(173g) \qquad \mathfrak{M} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \mathfrak{H}_0 .$$

Im Innern der gleichförmig magnetisierten Kugel befindet sich, wie aus (173b) hervorgeht, kein freier Magnetismus. Derselbe hat ausschließlich auf der Oberfläche seinen Sitz, wo er, nach (173c) mit der Dichte

$$(173h) \qquad \omega_m' = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \mathfrak{H}_0 \cos \vartheta$$

verteilt ist; ϑ gibt dabei den Winkel an, den der Kugelradius an dem betreffenden Punkte der Oberfläche mit der Richtung des ursprünglichen Feldes $\mathfrak{H}_0$ einschließt. Die Flächendichte des freien Magnetismus ist Null am Äquator, sie ist auf der einen Kugelhälfte positiv, auf der anderen negativ; die vom Pole der negativ belegten Halbkugel nach dem der positiv belegten weisende Rich-

tung stimmt mit $\mathfrak{H}_0$ überein, wenn $\mu > 1$ ist, sie weist $\mathfrak{H}_0$ entgegen, wenn $\mu < 1$ ist.

Übrigens folgen aus (173g) für die Feldstärke und für die Induktion im Innern der Kugel die Werte

$$(173\text{i}) \qquad \mathfrak{H} = \frac{3}{\mu + 2}\mathfrak{H}_0, \quad \mathfrak{B} = \frac{3\mu}{\mu + 2}\mathfrak{H}_0.$$

Man sieht, daß mit wachsendem μ die Feldstärke dem Grenzwerte Null, die Induktion dagegen einem endlichen Grenzwerte zustrebt. Dieses Verhalten — das nicht auf den besonderen Fall der Kugel beschränkt ist — hat praktisches Interesse, weil das Eisen einen hohen Wert von μ besitzt. Es wird, verglichen mit der Feldstärke im Luftraum, die Feldstärke im Eisen einen geringen Betrag haben. Ein Körper aus weichem Eisen spielt darum im magnetischen Felde eine ähnliche Rolle wie ein Leiter im elektrischen Felde; auf seiner Oberfläche münden die im Luftraume verlaufenden Kraftlinien nahezu senkrecht. Und was die Energiedichte anbelangt, so ist nach (173i)

$$\mathfrak{H}\mathfrak{B} = \frac{9\mu}{(\mu + 2)^2}\mathfrak{H}_0\mathfrak{B}_0;$$

es ist also für große μ die Energiedichte in der Eisenkugel gering, verglichen mit der Energiedichte, die an der betreffenden Stelle vor dem Heranbringen der Kugel bestand. Die magnetische Energie dringt also kaum in das weiche Eisen hinein, sondern sie speichert sich in dem Luftraum auf.

§ 57. Der freie elektrische Strom und das Vektorpotential eines magnetisierten Körpers.

Wir wollen das im vorigen Paragraphen behandelte Problem noch von einem anderen Standpunkt aus erörtern. Wir wollen der Lösung eine solche Form geben, daß bei gegebener Magnetisierung $\mathfrak{M}$ nicht sowohl die Feldstärke $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$, als vielmehr die magnetische Induktion $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0$ bestimmt wird. Da in dem ursprünglichen Felde $\mu = 1$, daher $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{H}_0$ war, so folgt aus (173) und (173f) für die x-Komponente

$$\mathfrak{B}_x - \mathfrak{B}_{0x} = 4\pi\mathfrak{M}_x + \int dv \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \right\}.$$

Nun ist nach der Poissonschen Gleichung

$$4\pi\mathfrak{M}_x = -\nabla^2 \int \frac{dv\,\mathfrak{M}_x}{r} = -\int dv\,\mathfrak{M}_x \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right\},$$

sowohl im Innern des magnetisierten Körpers als auch außerhalb, wo beide Seiten der letzten Gleichung verschwinden. Wir erhalten daher

$$\mathfrak{B}_x - \mathfrak{B}_{0x} = \frac{\partial}{\partial y} \int dv \left\{ \mathfrak{M}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \mathfrak{M}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \int dv \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \mathfrak{M}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right\}.$$

Diese Formel und die entsprechenden beiden für die y-Komponente und die z-Komponente geltenden schreiben wir in Vektorform

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0 = \operatorname{curl} \{\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_0\}, \tag{174}$$

wo

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_0 = -\int dv \left[\mathfrak{M} \nabla_a \frac{1}{r}\right] = +\int dv \left[\mathfrak{M} \nabla_q \frac{1}{r}\right] \tag{174a}$$

das **Vektorpotential des magnetisierten Körpers** darstellt.

Diese durch Umrechnung der Ergebnisse des vorigen Paragraphen erhaltene Darstellung des Feldes erfordert eine eingehendere Erläuterung. Sie bestimmt direkt die vom magnetisierten Körper herrührende Veränderung der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$. Die Darstellung mit Hilfe des skalaren Potentiales ist offenbar auf stromlose Felder beschränkt, in denen

$$\operatorname{curl} \{\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0\} = 0$$

ist. Die Darstellung mit Hilfe des Vektorpotentiales stützt sich auf die quellenfreie Beschaffenheit des Vektors $\mathfrak{B}$ und ist daher nicht auf stromlose Felder beschränkt, sondern sie gilt allgemein für jedes konstante magnetische Feld. Wir wollen daher den Ausdruck für das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ unmittelbar ableiten, und zwar für beliebige Stromverteilung und für beliebige magnetisierbare Körper. Wir wollen dabei die am Schlusse des § 53 erwähnte Zuordnung des Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ einerseits, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ andererseits deutlicher hervortreten lassen.

Wie div $\mathfrak{D}$ durch die wahre Elektrizität bestimmt wird, so wird curl $\mathfrak{H}$ durch den elektrischen Strom bestimmt. Da aber im elektrostatischen Felde nicht $\mathfrak{D}$, sondern $\mathfrak{E}$ sich allgemein als negativer Gradient eines skalaren Potentiales darstellt, so wünscht man behufs Berechnung desselben nicht die Quellen von $\mathfrak{D}$, sondern diejenigen von $\mathfrak{E}$ zu kennen. Daher führt man die Rechnungsgröße ein, die man als „freie Elektrizität" bezeichnet und deren Dichte der Divergenz von $\mathfrak{E}$ proportional ist. Hier, im magnetischen Felde, ist $\mathfrak{B}$ allgemein als Curl eines Vektorpotentiales $\mathfrak{A}$ darzustellen. Behufs Berechnung dieses Vektorpotentiales müßten wir die Wirbel von $\mathfrak{B}$ kennen. Zunächst kennen wir indessen nur die Wirbel von $\mathfrak{H}$, die der wahren Stromdichte proportional sind. Daher führen wir eine Rechnungsgröße ein, welche die Verteilung der Wirbel von $\mathfrak{B}$ anzeigt und welche wir als „Dichte des freien elektrischen Stromes" bezeichnen. Wir setzen, der Gleichung (169) für die wirkliche Stromdichte entsprechend,

$$\text{curl}\,\mathfrak{B} = \frac{4\pi\mathfrak{i}'}{c} \tag{175}$$

und nennen $\mathfrak{i}'$ die „räumliche Dichte des freien Stromes"; kommen Unstetigkeitsflächen in Betracht, so ergibt

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2] = \frac{4\pi\mathfrak{j}'}{c} \tag{175a}$$

die „Flächendichte $\mathfrak{j}'$ des freien Stromes". Diese letztere Formel ergibt sich aus der in Gleichung (104) des § 22 für den Flächenwirbel erhaltenen; $\mathfrak{n}$ bezeichnet dabei einen Einheitsvektor, der nach der durch die Ziffer 1 gekennzeichneten Seite der betreffenden Trennungsfläche f_{12} zweier Körper hinweist. Der freie Strom stimmt im ganzen Raume mit dem Wirbel des Vektors $\mathfrak{B}$ überein, bis auf den universellen Faktor c. Der freie Strom ist demnach ebenso wie der wirkliche Strom im stationären Felde durchweg quellenfrei verteilt.

Aus den Ergebnissen der §§ 21, 22 erhalten wir jetzt das Vektorpotential

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int\frac{dv\,\mathfrak{i}'}{r} + \frac{1}{c}\int\frac{df\,\mathfrak{j}'}{r}, \tag{175b}$$

wobei das erste Integral über den Raum, das zweite über die Unstetigkeitsflächen zu erstrecken ist. Da das Feld des freien Stromes als Wirbelfeld des Vektors $\mathfrak{B}$ definiert ist, so folgt nach § 21, daß die Gleichung

$$\text{div}\, \mathfrak{A} = 0 \tag{175c}$$

erfüllt ist, wofern nur die Integration über das ganze Wirbelgebiet von $\mathfrak{B}$ erstreckt wird. Kennt man die Verteilung des freien Stromes, so kann man das Vektorpotential und vermöge

$$\mathfrak{B} = \text{curl}\, \mathfrak{A} \tag{175d}$$

die magnetische Induktion finden, ähnlich wie man bei Kenntnis der Verteilung der freien Elektrizität das skalare Potential und die elektrische Kraft des elektrostatischen Feldes bestimmen kann. Freilich ist der freie Strom nur eine Rechnungsgröße; seine Verteilung ist keineswegs von vornherein bekannt.

Nach (175), (112) und (169) ist

$$\frac{4\pi \mathfrak{i}'}{c} = \text{curl}\, \mu \mathfrak{H} = \mu \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c} + [\nabla \mu, \mathfrak{H}], \qquad \text{daher}$$

$$\mathfrak{i}' = \mu \mathfrak{i} + \frac{c}{4\pi} [\nabla \mu, \mathfrak{H}]. \tag{175e}$$

Es tritt demnach dort freie Strömung auf, wo ein wirklicher Strom fließt oder die Permeabilität einen Gradienten besitzt; letzteres kann in inhomogenen sowie in ferromagnetischen Körpern stattfinden. Unstetigkeitsflächen mit flächenhaft verteilter Strömung sind als Grenzfall eines inhomogenen Körpers aufzufassen.

Aus (195b, e) ergibt sich für den Fall einer stetig sich ändernden Permeabilität, d. h. räumlich verteilten freien Strom, der folgende Ausdruck des Vektorpotentiales

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \int \frac{dv \mu \mathfrak{i}}{r} + \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{r} [\nabla \mu, \mathfrak{H}]. \tag{175f}$$

Nur ein konstantes μ darf in dem ersten Gliede vor das Integralzeichen gesetzt werden, wodurch der Ausdruck, weil mit dem Gradienten von μ das zweite Glied verschwindet, in (170) übergeht.

Wir wollen jetzt den freien Strom zu der Magnetisierung $\mathfrak{M}$, die in (173) definiert wurde, in Beziehung setzen. Es ist

$$\frac{4\pi\mathfrak{i}'}{c} = \operatorname{curl}\{\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}\} = \frac{4\pi\mathfrak{i}}{c} + 4\pi \operatorname{curl}\mathfrak{M}, \qquad \text{daher}$$

$$\frac{\mathfrak{i}'}{c} = \frac{\mathfrak{i}}{c} + \operatorname{curl}\mathfrak{M}. \tag{176}$$

Ganz entsprechend wie die räumliche Dichte, drückt sich die Flächendichte des freien Stromes durch die Flächendichte $\mathfrak{j}$ des wirklichen Stromes und den Flächenwirbel von $\mathfrak{M}$ aus:

$$\frac{\mathfrak{j}'}{c} = \frac{\mathfrak{j}}{c} + [\mathfrak{n}, \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2]. \tag{176a}$$

Wir werden indessen den wirklichen Leitungsstrom infolge des endlichen Widerstandes der Leiter im allgemeinen nur als räumlich verteilt ansehen dürfen und seine Flächendichte $\mathfrak{j}$ daher gleich Null zu setzen haben. Daher wird (175b)

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int\frac{dv\,\mathfrak{i}}{r} + \int\frac{dv}{r}\operatorname{curl}\mathfrak{M} + \int\frac{df}{r}[\mathfrak{n}, \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2]. \tag{176b}$$

Wir fassen die Glieder zusammen, die von der Magnetisierung der durch die Ziffern 1, 2 gekennzeichneten Körper herrühren, wobei wir berücksichtigen, daß die äußeren Normalen n_1, n_2 der Begrenzungsflächen dieser Körper dem Vektor $\mathfrak{n}$ entgegen bzw. ihm parallel weisen. Aus der Regel (102b) folgt dann

$$\int dv_1 \operatorname{curl}\left\{\frac{\mathfrak{M}}{r}\right\} = -\int\frac{df_1}{r}[\mathfrak{n}, \mathfrak{M}_1]$$

$$\int dv_2 \operatorname{curl}\left\{\frac{\mathfrak{M}}{r}\right\} = +\int\frac{df_2}{r}[\mathfrak{n}, \mathfrak{M}_2].$$

Berücksichtigt man weiter, daß nach Regel (112)

$$\frac{1}{r}\operatorname{curl}\mathfrak{M} = \operatorname{curl}\left\{\frac{\mathfrak{M}}{r}\right\} - \left[\nabla_q\frac{1}{r}, \mathfrak{M}\right]$$

zu setzen ist — selbstverständlich handelt es sich in (176b) um die Ableitungen nach den Koordinaten des magnetisierten Körpers, so daß der Quellpunktgradient auftritt —, so folgt

$$\int\frac{dv}{r}\operatorname{curl}\mathfrak{M} = \int\frac{df}{r}[\mathfrak{n}, \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1] + \int dv\left[\mathfrak{M}\nabla_q\frac{1}{r}\right].$$

Hier ist das Flächenintegral über sämtliche Begrenzungsflächen

zweier magnetisierter Körper, das Raumintegral über alle magnetisierten Körperstücke zu erstrecken. Durch Einsetzen in (176b) erhalten wir als Ausdruck des Vektorpotentiales

(176c) $$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int\frac{dv\,\mathfrak{i}}{r} + \int dv\left[\mathfrak{M}\nabla_{q}\frac{1}{r}\right].$$

Es stimmt durchaus überein mit dem früher auf Grund besonderer Voraussetzungen in den Formeln (171), (174a) erhaltenen. Der jetzt gegebene Beweis ist ganz allgemein. Er beruht neben den allgemeinen Eigenschaften der Vektorfelder nur auf den Grundgleichungen

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0, \qquad \operatorname{curl}\mathfrak{H} = \frac{4\pi\mathfrak{i}}{c}.$$

Die Formel (176c) gilt demnach, ebenso wie diese Grundformeln, für jedes stationäre magnetische Feld, z. B. auch dann, wenn magnetisierbare Körper vom Strome durchflossen sind. Ist die Verteilung des elektrischen Stromes sowie die Magnetisierung der Körper bekannt, so bestimmt (175d) zusammen mit (176c) das Feld des Vektors $\mathfrak{B}$ sowohl außerhalb wie auch innerhalb der magnetisierten und der elektrisch durchströmten Körper.

Eine homogene, stromlose Eisenkugel nimmt in einem gleichförmigen Felde $\mathfrak{H}_0$ die durch (173g) gegebene gleichförmige Magnetisierung an. Nach (176) ist in ihrem Innern keine freie Strömung, wohl aber kreist nach (176a) eine solche längs ihrer Oberfläche. Beziehen wir den Index 1 auf den umgebenden Äther, so daß die von (2) nach (1) weisende Normale $\mathfrak{n}$ mit dem vom Mittelpunkte aus gezogenen Fahrstrahl zusammenfällt, so wird

(176d) $$\frac{\mathfrak{i}'}{c} = \frac{3}{4\pi}\,\frac{\mu-1}{\mu+2}\,[\mathfrak{H}_0\mathfrak{n}].$$

Die freie Strömung kreist also längs der Breitenkreise, und zwar von Westen nach Osten, wenn $\mathfrak{H}_0$ vom Südpol zum Nordpol weist und $\mu > 1$ ist. Der Betrag der Flächendichte der Strömung ist

$$|\mathfrak{i}'| = c\,\frac{3}{4\pi}\,\frac{\mu-1}{\mu+2}\,|\mathfrak{H}_0|\sin\vartheta, \qquad \vartheta = \sphericalangle\,\mathfrak{n},\mathfrak{H}_0.$$

Würde man die Eisenkugel beseitigen und statt ihrer dieses

Stromsystem anbringen, so würde im Äther die Verteilung von $\mathfrak{B}$ die gleiche sein, wie vorher innerhalb und außerhalb der Eisenkugel. Das Feld $\mathfrak{H}$ aber würde jetzt innerhalb der Kugel ein anderes sein. Wäre es hingegen möglich, die durch (173h) gegebene Verteilung von freiem Magnetismus durch wahren Magnetismus im leeren Raume zu ersetzen, so würde diese ein Feld $\mathfrak{H}$ erregen, welches innerhalb und außerhalb der Kugel im Äther mit dem vorher von der magnetisierten Eisenkugel erregten übereinstimmt. Die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ aber hätte innerhalb der Kugel einen anderen Betrag.

So dient die Einführung des freien Magnetismus zur Darstellung des Feldes $\mathfrak{H}$, die allgemeiner verwendbare des freien Stromes zur Darstellung des Feldes der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$.

§ 58. Spannungen und mechanische Kräfte im magnetischen Felde.

Im zweiten Abschnitte haben wir die mechanischen Kräfte behandelt, die im elektrostatischen Felde wirksam sind; und zwar haben wir zuerst, in § 44, die Volumkräfte berechnet, und haben dann, in § 45, gezeigt, daß sich ihre Resultierende, für ein beliebiges Gebiet, durch ein System von fiktiven, über die Grenzfläche des Gebietes verteilten Flächenkräften ersetzen läßt. Indem wir uns jetzt zur Betrachtung der bewegenden Kräfte magnetischer Felder wenden, wollen wir von der im Eingange dieses Abschnittes (§ 53) besprochenen Hertz-Heavisideschen Analogie der elektrischen und magnetischen Größen ausgehen. Es soll, zunächst ganz hypothetisch, angenommen werden, daß für die magnetische Flächenkraft $\mathfrak{T}^m$ ein Ausdruck gelte, der im Sinne dieser Analogie dem früher gefundenen Ausdrucke (148) für die elektrische Flächenkraft entspricht:

$$(177) \qquad 8\pi\mathfrak{T}^m = 2\mathfrak{H}(\mu\mathfrak{H}, \mathfrak{n}) - \mathfrak{n}\mu\mathfrak{H}^2;$$

derselbe kann auch in der in (148a) entsprechenden Form geschrieben werden

$$(177\text{a}) \qquad 8\pi\mathfrak{T}^m = \mathfrak{H}(\mathfrak{B}\mathfrak{n}) + [\mathfrak{B}[\mathfrak{H}\mathfrak{n}]].$$

Drückt man, ebenso wie es in § 45, Gl. (149), mit $\mathfrak{T}^e$ geschah,

$\mathfrak{T}^m$ als lineare Vektorfunktion des Normalenvektors $\mathfrak{n}$ aus, so gelangt man zu dem Koeffizientensystem der sechs Tensorkomponenten

$$
(177\text{b}) \qquad \begin{cases} 8\pi T^m_{xx} = \mu\left(\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2\right), \\ 8\pi T^m_{yy} = \mu\left(\mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2 - \mathfrak{H}_x^2\right), \\ 8\pi T^m_{zz} = \mu\left(\mathfrak{H}_z^2 - \mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2\right). \end{cases}
$$

$$
(177\text{c}) \qquad \begin{cases} 8\pi T^m_{xy} = 8\pi T^m_{yx} = 2\mu\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y, \\ 8\pi T^m_{yz} = 8\pi T^m_{zy} = 2\mu\mathfrak{H}_y\mathfrak{H}_z, \\ 8\pi T^m_{zx} = 8\pi T^m_{xz} = 2\mu\mathfrak{H}_z\mathfrak{H}_x. \end{cases}
$$

Dies sind die Maxwellschen Spannungen im magnetischen Felde; sie lassen sich, entsprechend wie die elektrischen Spannungen, als ein Längszug und Querdruck der magnetischen Kraftlinien deuten, die beide dem Betrage nach der magnetischen Energiedichte gleich sind.

Um den zunächst ganz hypothetischen Ansatz für die magnetische Flächenkraft zu rechtfertigen, wollen wir uns davon überzeugen, daß die aus ihm abzuleitenden Kräfte mit den im magnetischen Felde tatsächlich wirkenden übereinstimmen. Wir setzen also die resultierende Kraft auf ein beliebiges Glied des magnetischen Feldes gleich dem Oberflächenintegral der fingierten Flächenkraft:

$$
(177\text{d}) \qquad \mathfrak{K}^m = \int df\,\mathfrak{T}^m;
$$

dann folgt aus (177)

$$
(177\text{e}) \qquad 8\pi\mathfrak{K}^m = \int df\{2\mathfrak{H}(\mu\mathfrak{H}, \mathfrak{n}) - \mathfrak{n}\mu\mathfrak{H}^2\}.
$$

Nun wurde in § 45 die Formel (147) bewiesen, und es wurde bemerkt, daß an Stelle des Skalars ε und des Vektors $\mathfrak{E}$ dort beliebige andere stetige Skalare und Vektoren treten können; schreiben wir μ statt ε, $\mathfrak{H}$ statt $\mathfrak{E}$, so lautet sie:

$$
\int dv\{2\mathfrak{H}\,\mathrm{div}\,\mu\mathfrak{H} - \mathfrak{H}^2\nabla\mu - 2[\mu\mathfrak{H}, \mathrm{curl}\,\mathfrak{H}]\} = \\ = \int df\{2\mathfrak{H}(\mu\mathfrak{H}, \mathfrak{n}) - \mathfrak{n}\mu\mathfrak{H}^2\}.
$$

Hier stimmt nun die rechte Seite mit derjenigen von (177e) überein; es müssen also auch die linken Seiten einander gleich sein. Beachtet man, daß

$$\operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

und

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 4\pi \frac{\mathfrak{i}}{c}$$

ist, so wird

$$\mathfrak{K}^m = \int dv \left\{ -\frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \nabla \mu - \left[\mu \mathfrak{H}, \frac{\mathfrak{i}}{c} \right] \right\}$$

oder

$$\mathfrak{K}^m = \int dv \left\{ \left[\frac{\mathfrak{i}}{c}, \mathfrak{B} \right] - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \nabla \mu \right\}. \tag{177f}$$

Dieser Ausdruck für die gesamte Kraft entspricht einer auf die Volumeinheit bezogenen Kraft

$$\mathfrak{k}^m = \left[\frac{\mathfrak{i}}{c}, \mathfrak{B} \right] - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \nabla \mu. \tag{178}$$

Hier stellt das erste Glied diejenige Kraft dar, welche das magnetische Feld auf elektrisch durchströmte Körper ausübt. Dieselbe ist gleich dem äußeren Produkte aus der elektromagnetisch gemessenen Stromdichte und dem Vektor $\mathfrak{B}$ der magnetischen Induktion.

Um dieses Gesetz mit der Erfahrung zu vergleichen, denke man sich ein Gleitstück; dieses gehöre einem geschlossenen Stromkreise an, der von dem Strome J durchflossen wird; das Gleitstück sei mit dem übrigen Stromkreise durch Gleitstellen so verbunden, daß es unabhängig von diesem bewegt werden kann. Wirkt nun ein äußeres magnetisches Feld, so wirkt auf das Gleitstück, dessen Länge und Stromrichtung durch den Vektor $\mathfrak{s}$ gekennzeichnet werde, die Kraft

$$\mathfrak{K}^m = \mathfrak{k}^m q \, |\mathfrak{s}| = q \frac{|\mathfrak{i}|}{c} [\mathfrak{s}\mathfrak{B}]$$

oder

$$\mathfrak{K}^m = \frac{J}{c} [\mathfrak{s}\mathfrak{B}]. \tag{178a}$$

Dieses Gesetz für die Kraft auf ein Gleitstück wird von der Erfahrung bestätigt.

Die vorliegenden experimentellen Untersuchungen beziehen sich zwar alle auf das Feld im Luftraume und lassen es daher unentschieden, ob nicht etwa $\mathfrak{H}$ statt $\mathfrak{B}$ die mechanische Kraft

bestimmt. Auch gilt die soeben gegebene Ableitung nur für den Fall, daß der stromführende Draht und seine Umgebung die gleiche Permeabilität besitzen, da sonst in (178) das zweite, den Gradienten von μ enthaltende Glied zu berücksichtigen wäre. Doch lehrt sowohl die Betrachtung der Dimensionen als auch die später zu besprechende Reziprozität der induzierten und der bewegenden Kräfte, daß allein der Vektor $\mathfrak{B}$ als maßgebend für die mechanische Kraft in Frage kommen kann.

Hat man es mit einem Felde in einem Körper von räumlich wechselnder Permeabilität zu tun, so kommt das zweite Glied im Kraftausdrucke (178) in Betracht. Dasselbe tritt allein, ohne das erste Glied, auf, wenn der magnetisierte Körper stromlos ist; es entspricht ganz der Kraft, die im elektrischen Felde auf ungeladene Körper wirkt. Insofern als diese Analogie der Kräfte, die auf elektrisch und magnetisch polarisierte Körper wirken, von der Erfahrung bestätigt wird, kann man das zweite Glied des Kraftausdruckes (178) als experimentell sichergestellt ansehen.

An der Trennungsfläche zweier Körper von verschiedener Permeabilität greift eine wirkliche Flächenkraft an, welche ganz der in § 45 erhaltenen elektrischen Flächenkraft entspricht. Man leitet sie auf ganz ähnliche Weise aus (177a) ab, indem man die beiderseits der Trennungsfläche angenommenen fingierten Flächenkräfte summiert, unter Berücksichtigung des stetigen Verhaltens der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{H}$ und der normalen Komponente von $\mathfrak{B}$; die so entstehenden, (150a, b) entsprechenden Ausdrücke lauten

$$(178\text{b}) \quad \mathfrak{T}_1^m + \mathfrak{T}_2^m = \frac{\mathfrak{n}}{8\pi}\left\{\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right)(\mathfrak{B}_1\mathfrak{n})^2 + (\mu_2 - \mu_1)[\mathfrak{B}_1\mathfrak{n}]^2\right\}$$

und

$$(178\text{c}) \quad \mathfrak{T}_1^m + \mathfrak{T}_2^m = \mathfrak{n}\,\frac{\mu_2 - \mu_1}{8\pi}\left\{\mathfrak{H}_1^{\,2} - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2}(\mathfrak{H}_1\mathfrak{n})^2\right\}.$$

Übrigens beziehen sich die Ergebnisse dieses Paragraphen nur auf den Fall, daß die Abhängigkeit der Permeabilität von der Feldstärke nicht in Betracht kommt. Auch sind hier, entsprechend wie für das elektrische Feld in den §§ 44, 45, die durch die Veränderung der Permeabilität bei Formänderung bedingten Hertzschen Ergänzungsspannungen unberücksichtigt geblieben.

§ 59. Die beiden Hauptgleichungen.

Die erste Hauptgleichung war in der Form, die wir ihr gegeben haben (169), auf stationäre elektrische Ströme beschränkt. Denn nur der stationäre Leitungsstrom ist quellenfrei verteilt, wie es Gleichung (169) verlangt. In der Tat folgt aus (169) und (94), daß die Divergenz von $\mathfrak{i}$ gleich Null ist. Ist der Leitungsstrom nicht quellenfrei, so ist es nicht möglich, ihn dem curl $\mathfrak{H}$ proportional zu setzen. Nun wissen wir aber (§ 47), daß ein nichtstationärer Strom im allgemeinen nicht durchweg quellenfrei ist. Während der stationäre Strom nur in geschlossenen Leitungskreisen kreist, können wechselnde Ströme auch in offenen, etwa durch einen Kondensator unterbrochenen Bahnen fließen. Hier bilden die Kondensatorbelegungen Quellen bzw. Senken des Leitungsstromes. Es ist daher nicht möglich, die Form (169) der ersten Hauptgleichung allgemein aufrechtzuerhalten.

Wir haben indessen bereits in § 47 gesehen, daß in diesem Falle der Leitungsstrom seine Fortsetzung in dem Verschiebungsstrome findet, daß also Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zusammen eine quellenfreie Strömung bilden. Es ist mithin vom Standpunkte der Nahewirkungstheorie aus eine sehr naheliegende Annahme, daß im allgemeinen, für zeitlich wechselnde Felder, der „wahre Strom“ $\mathfrak{c}$, der sich aus Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zusammensetzt, in der ersten Hauptgleichung an Stelle des Leitungsstromes tritt. Das ist in der Tat die Annahme, welche Maxwell gemacht hat und welche die Maxwellsche Theorie von den anderen, auf den Anschauungen der Fernwirkung aufgebauten elektrodynamischen Theorien unterscheidet.

Jene Fernwirkungstheorien ergaben für die Elektrostatik sowie für stationäre elektrische Ströme Folgerungen, die mit denen der Maxwellschen Theorie übereinstimmten; nur die Deutung war eine andere. Dort sah man die Potentiale, das skalare Potential bzw. das Vektorpotential, als die wesentlichen Zustandsgrößen an; die Erweiterung der Theorie auf ungeschlossene Leitungs-

ströme suchte man durch Abänderung der Potentiale zu erzielen. Die Maxwellsche Theorie, welche die elektromagnetischen Vektoren als die wirklichen Zustandsgrößen betrachtet, nimmt die Erweiterung in den differentiellen Verkettungsgleichungen vor und gelangt so zu der erweiterten ersten Hauptgleichung der Elektrodynamik:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \cdot \mathfrak{c} .$$

Der Wirbel der magnetischen Feldstärke ist dem wahren Strome proportional.

Wir ziehen zunächst nur ruhende Körper in Betracht und haben daher Konvektionsströme nicht zu berücksichtigen, sondern für den wahren Strom $\mathfrak{c}$ den Ausdruck (157) zu setzen:

$$\text{(Ia)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$$

ist die allgemeinste Form der ersten Hauptgleichung für ruhende Körper.

Die zweite Hauptgleichung der Elektrodynamik ergibt sich aus dem Faradayschen Induktionsgesetz. Wir haben dasselbe bereits im § 54 bei der Ermittelung des Vektors $\mathfrak{B}$ herangezogen, haben aber dort nur von dem Zeitintegrale des Stromes gesprochen, der bei Erregung eines magnetischen Feldes in einem linearen Leiter induziert wird. Das Faradaysche Induktionsgesetz reicht aber weiter, es bezieht sich auf beliebig veränderliche magnetische Felder.

Um zur allgemeinen Fassung des Faradayschen Induktionsgesetzes zu gelangen, betrachte man einen geschlossenen linearen Leiter; dessen Leitlinie $\mathfrak{s}$ sei die Randkurve einer Fläche f; mit Hilfe einer Rechtsschraube werde dem Umlaufssinne längs des Leiters ein bestimmter Sinn der Flächennormalen zugeordnet, und der gesamte Induktionsfluß

$$\Phi = \int df \mathfrak{B}_n$$

berechnet, welcher die Fläche in dem betreffenden Sinne durchsetzt. Betrachtet man, wie früher (§ 54), $\mathfrak{B}$ als einen durchweg quellenfreien Vektor, so ergibt sich der Induktionsfluß als un-

abhängig von der besonderen Wahl der Fläche, die von dem linearen Leiter umrandet ist; er hängt nur von der Lage und Gestalt der Leitlinie $\mathfrak{s}$, d. h. der Randkurve der Fläche ab.

Wirken nun in dem Leiter eingeprägte elektrische Kräfte $\mathfrak{E}^e$, welche eine eingeprägte Integralkraft

$$E^e = \oint \mathfrak{E}^e d\mathfrak{s}$$

ergeben, so fließt, falls der Induktionsfluß Φ sich nicht ändert, in dem Leiter ein Strom, dessen Stromstärke gleich dem Quotienten aus der eingeprägten Integralkraft und dem Widerstande R des Leitungskreises ist. Sobald aber der Induktionsfluß eine zeitliche Änderung erfährt, folgt die Stromstärke nicht mehr jenem Gesetze; es hat vielmehr den Anschein, als ob außer jener, durch die thermische oder chemische Inhomogenität des Kreises bedingten eingeprägten Integralkraft E^e noch eine neue, mit der zeitlichen Schwankung des Induktionsflusses verknüpfte Integralkraft auftrete; und zwar wirkt diese bei abnehmendem Φ in positivem, bei zunehmendem Φ in negativem Sinne. Die genaue Fassung des Faradayschen Induktionsgesetzes lautet

$$JR - E^e = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}. \tag{179}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung bezeichnet man wohl auch als „induzierte elektromotorische Kraft“. Man hat aber, wenn man sich dieser Ausdrucksweise bedient, zu beachten, daß diese induzierte Kraft, oder besser Integralkraft, nur in bezug auf einen geschlossenen Leitungskreis definiert ist; denn sie ist durch die Schwankung des Induktionsflusses Φ bestimmt, der eine von der Leitlinie des Kreises berandete Fläche durchsetzt. Für eine ungeschlossene Leitung verliert Φ, und daher auch der Begriff der induzierten elektromotorischen Kraft, jede Bedeutung; es hat daher keinen Sinn, von der „induzierten Kraft“ in einem ungeschlossenen Drahtstücke zu sprechen.

Das Induktionsgesetz (179) gilt nicht nur für ruhende, sondern auch für bewegte Leiter. Es erhält eine übersichtlichere Form, wenn man, unter $\mathfrak{E}$ wie in (161) den Vektor verstehend, dem die Stromdichte $\mathfrak{i}$ proportional ist, setzt

$$JR = J\oint \frac{ds}{\sigma q} = \oint d\mathfrak{s}\,\frac{\mathfrak{i}}{\sigma} = \oint d\mathfrak{s}\,\mathfrak{E}.$$

Dann wird, gemäß der eben angegebenen Bedeutung von E^e und Φ

(179a) $$\oint d\mathfrak{s}\,\mathfrak{E} - \oint d\mathfrak{s}\,\mathfrak{E}^e = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int df\,\mathfrak{B}_n.$$

In dieser auch für bewegte Körper gültigen Form geschrieben, stellt das Induktionsgesetz die „zweite Hauptgleichung der Elektrodynamik“ dar.

Beschränkt man sich auf den Fall der Ruhe, so kann man rechts, bei der Ableitung nach der Zeit, die Fläche f festhalten und allein den Vektor $\mathfrak{B}$ differentiieren. Alsdann ergibt sich

(179b) $$\oint d\mathfrak{s}\,\mathfrak{E} - \oint d\mathfrak{s}\,\mathfrak{E}^e = -\frac{1}{c}\int df\,\frac{\partial \mathfrak{B}_n}{\partial t};$$

dies ist die zweite Hauptgleichung für ruhende Körper, in Form eines Integralgesetzes geschrieben. Zu diesem Integralgesetze führt, wie oben dargelegt worden ist, die Erfahrung, die sich zunächst allerdings nur auf lineare Leiter bezieht. Doch bestätigt sich das so gefaßte Induktionsgesetz auch dann, wenn es sich um körperliche Leiter handelt, und $\mathfrak{s}$ eine beliebige geschlossene Kurve im Innern eines solchen ist. Man kann dann, nachdem man die linke Seite mit Hilfe des Stokesschen Satzes in ein Flächenintegral umgewandelt hat, zu unendlich kleinen Gebietsteilen übergehen, und gelangt so zu der differentiellen Form der zweiten Hauptgleichung für ruhende Körper:

(II) $$\operatorname{curl}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}.$$

Die Maxwellsche Theorie sieht die zweite Hauptgleichung nicht nur in Leitern, sondern auch in Isolatoren als gültig an. Hier werden die elektrischen Kräfte sich zwar nicht, wie in Leitern, durch die Erregung von Leitungsströmen bemerkbar machen; doch ist es zulässig und vom Standpunkte der Nahewirkungstheorie aus folgerichtig, auch hier das Vorhandensein elektrischer Kräfte in einem zeitlich veränderlichen magnetischen Felde anzunehmen.

Stellt man die zweite Hauptgleichung (II) der ersten (Ia)

gegenüber, so fällt die Hertz-Heavisidesche Analogie der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ einerseits, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ andererseits auf. Auf der linken Seite steht in der Tat jedesmal der Curl der Feldstärke $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{H}$, auf der rechten Seite die zeitliche Änderung der Vektoren $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{B}$. Die Symmetrie wird nur gestört durch das Fehlen des magnetischen Leitungsstromes und durch die hiermit zusammenhängende, dem Vektor $\mathfrak{B}$ auferlegte Bedingung der Quellenlosigkeit, der $\mathfrak{D}$ im allgemeinen nicht zu genügen braucht. Man kann indessen diese Lücken der Analogie äußerlich verhüllen, indem man der ersten Hauptgleichung (I) die zweite in der Form gegenüberstellt

$$\text{(IIa)} \qquad \operatorname{curl}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{4\pi}{c}\cdot \mathfrak{g} \quad \text{und} \quad \mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

als „Dichte des wahren magnetischen Stromes“ bezeichnet. Führt man dann noch in (I) eingeprägte magnetische Kräfte ein, wovon wir hier noch absehen wollen, so ist die Analogie vollkommen, nur das Vorzeichen ist in der zweiten Hauptgleichung ein anderes als in der ersten.

Diese Verschiedenheit des Vorzeichens ist eng mit dem Mechanismus der elektromagnetischen Wechselwirkungen verknüpft.

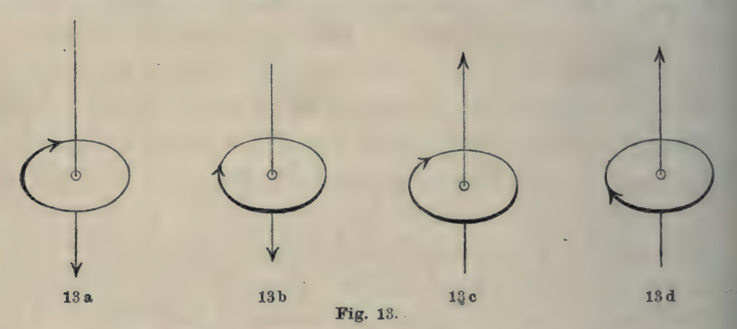


Fig. 13.

Die beste Übersicht über die Vorzeichenverhältnisse wird man aus den vorstehenden vier Figuren erhalten, von denen Fig. 13a die Ampèresche Schwimmregel für einen geradlinigen Strom vor Augen führt. Fig. 13b zeigt, was aus der Ampèreschen Schwimmregel für die Richtung des von einem elektrischen Kreisstrome erregten magnetischen Feldes folgt. Die Ampèresche Regel ist

in der Formel (168) für das Feld eines linearen Stromes enthalten. Stromrichtung in den Leiterstücken, Fahrstrahl nach dem Aufpunkt und magnetische Feldrichtung entsprechen sich wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand.

Eine ähnliche Vorzeichenregel über die Richtung der mit einem magnetischen Strome verbundenen elektrischen Kraft liefert uns das Lenzsche Gesetz. Ihm zufolge ruft der induzierte elektrische Strom selbst ein magnetisches Feld hervor, welches dem erregenden magnetischen Strome entgegengerichtet ist. Auf Grund dieses Gesetzes geht für die Richtung der mit einem geradlinigen magnetischen Strom verbundenen elektrischen Kraft Fig. 13c aus 13b, für einen magnetischen Kreisstrom Fig. 13d aus 13a hervor. *Für den magnetischen Strom und die zugehörige elektrische Kraft kehrt sich also die Ampèresche Schwimmregel um.* Dem entspricht das entgegengesetzte Vorzeichen in den beiden Hauptgleichungen.

Daß wir bei der Festlegung der Richtung der magnetischen Vektoren stets von rechter oder linker Hand, von Rechtsschraube oder Linksschraube reden müssen, läßt schon vermuten, daß hier axiale Vektoren eine Rolle spielen. Das ist in der Tat der Fall. Wir haben schon in § 19 gesehen, daß der Curl eines polaren Vektors stets axialer, der Curl eines axialen Vektors stets polarer Natur ist. Nun müssen wir unbedingt annehmen, daß die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{D}$ zu derselben Art von Vektoren gehören; denn auch in isotropen Körpern ruft ein elektrisches Feld Leitungsstrom bzw. elektrische Verschiebung hervor, es kann aber nur in Körpern von schraubenartiger Struktur ein polarer Vektor einen axialen, oder ein axialer Vektor einen polaren erregen. Aus demselben Grunde müssen die beiden magnetischen Vektoren $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ Vektoren derselben Art sein. Demgemäß lassen die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes nur die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten: *entweder alle elektrischen Vektoren sind polarer und alle magnetischen axialer Art; oder alle magnetischen Vektoren sind polarer, alle elektrischen axialer Art.* Wir hatten uns bereits in § 26 für die erstere Möglichkeit entschieden. In der Tat wirkt

im gleichförmigen elektrischen Felde auf ein geladenes Probekügelchen eine translatorische Kraft, während eine Magnetnadel im gleichförmigen Magnetfelde nur Drehkräften unterworfen ist. Es liegt hiernach nahe, mit Maxwell die elektrische Kraft als polar, die magnetische als axial anzusehen.

Ein bündigerer Beweis dafür, daß die erstere Möglichkeit zutrifft, läßt sich auf Grund des sogenannten Hall-Effektes erbringen. In einer dünnen Metallplatte fließe ein elektrischer Strom; diesem parallel ist zunächst das elektrische Feld in der Platte gerichtet. Nun errege man ein Magnetfeld, dessen Kraftlinien die Plattenebene senkrecht durchschneiden. Alsdann entsteht in der Platte ein transversales elektrisches Feld, dessen Richtung sich umkehrt, wenn entweder der Strom oder das Magnetfeld umgekehrt wird. Nun kann ein polarer Vektor und ein axialer mit einer auf jenem senkrechten Achse sehr wohl einen dritten polaren Vektor bestimmen; denn die Richtung des letzteren kann eindeutig gekennzeichnet werden durch die Festsetzung, daß sie erhalten wird, wenn man die Richtung des ersten, polaren Vektors um einen Rechten in dem durch den zweiten, axialen Vektor festgelegten Sinne dreht. Dieser dritte Vektor wird dann sowohl bei Umkehrung der Richtung des ersten wie auch bei Umkehrung des Drehsinnes des zweiten Vektors die Richtung umkehren. Dieser Möglichkeit entspricht der Hall-Effekt, wenn man den elektrischen Vektoren polare, den magnetischen axiale Natur zuschreibt. Hingegen ist es nicht denkbar, daß ein axialer Vektor zusammen mit einem auf ihm senkrechten polaren eindeutig den Drehungssinn um eine Achse bestimmt, die senkrecht auf der Achse des ersten und der Richtung des zweiten Vektors ist. Denn spiegelt man dieses Gebilde an der Ebene, die durch die Richtung des zweiten und die Achse des dritten Vektors geht, die mithin auf der Achse des ersten senkrecht steht, so bleibt die Richtung des zweiten und der Drehsinn des ersten unverändert, der Drehsinn des dritten aber kehrt sich um. Es ist daher nicht möglich, daß in einem isotropen Körper ein polarer Vektor zusammen mit einem axialen in der angenommenen Weise einen dritten axialen Vektor bestimmt. Das

kann nur in solchen anisotropen Körpern stattfinden, in denen zwei spiegelbildlich einander entsprechende Felder nicht als gleichwertig zu betrachten sind. Es ist also mit der Existenz des Hall-Effektes in isotropen Metallen die Annahme nicht vereinbar, daß die elektrische Kraft ein axialer Vektor ist. Der Hall-Effekt entscheidet zugunsten der ersten der beiden mit den Grundgleichungen verträglichen Möglichkeiten: die elektrischen Vektoren sind polarer, die magnetischen axialer Art.

Da die Divergenz eines polaren Vektors ein richtiger Skalar, die Divergenz eines axialen Vektors hingegen ein Pseudoskalar ist (§ 7), so haben wir die Dichte der wahren Elektrizität als Skalar im eigentlichen Sinne des Wortes zu betrachten. Die Dichte des wahren Magnetismus hingegen würde, wenn sie von Null verschieden wäre, ein Pseudoskalar sein, der beim Übergang von einem Rechtssystem zu einem Linkssystem das Vorzeichen wechselte. Der wahre Magnetismus könnte daher nicht als Maß der Menge einer Substanz oder auch nur als Maß der zeitlichen Zunahme oder Abnahme einer solchen Menge betrachtet werden.

§ 60. Die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes für ruhende Körper.

Die beiden Hauptgleichungen der Elektrodynamik sind zunächst nur ein allgemeines Schema; dasselbe wird erst durch Hinzufügung der Beziehungen ausgefüllt, die einerseits die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ mit der elektrischen Stromdichte bzw. der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$, andererseits die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ mit der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ verknüpfen. Nun ist im elektrostatischen Felde

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E},$$

ferner gilt für stationären elektrischen Strom gemäß dem Ohmschen Gesetz

$$\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E};$$

dabei sind die Dielektrizitätskonstante ε und die Leitfähigkeit σ Konstanten, die das elektrische Verhalten des betreffenden iso-

tropen Körpers kennzeichnen. Auch die magnetischen Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ werden einander proportional gesetzt:

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H},$$

doch ist die Permeabilität μ nur für diamagnetische und paramagnetische Körper wirklich konstant, für ferromagnetische Körper aber hängt sie nicht nur von dem jeweiligen Felde, sondern auch von der Vorgeschichte des Feldes ab. Wir schließen daher ferromagnetische Körper hier ausdrücklich aus, indem wir uns vorbehalten, im vierten Abschnitte auf dieselben zurückzukommen.

Die Maxwellsche Theorie nimmt nun an, daß die Proportionalität der elektrischen Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{i}$ einerseits, der magnetischen Vektoren $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ andererseits, die für statische und stationäre Felder durch die Erfahrung bestätigt wird, auch für beliebig rasch wechselnde Felder gilt. Führt man diese Annahme in die Hauptgleichungen (Ia) und (II) ein, so erhält man die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes für ruhende Körper in der Heaviside-Hertzschen Form:

$$(180) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} &= \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}, \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} &= \operatorname{curl} \{ \mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e \}. \end{aligned} \right.$$

Ist die augenblickliche Verteilung des magnetischen und des elektrischen Feldes gegeben und sind die eingeprägten elektrischen Kräfte bekannt, so bestimmen die beiden ersten Differentialgleichungen die zeitliche Änderung des elektrischen Vektors $\mathfrak{E}$ und des magnetischen Vektors $\mathfrak{H}$ an allen Punkten des Feldes. Sie bestimmen daher die aus einem Anfangszustande des Feldes entstehenden Folgezustände.

Wir sind zu diesen Feldgleichungen der Maxwellschen Theorie auf synthetischem Wege gelangt, indem wir von den durch die Erfahrung bestätigten Gesetzen des elektrostatischen Feldes und des magnetischen Feldes stationärer Ströme ausgingen und diese

Gesetze in einer zwar hypothetischen, aber doch vom Standpunkte der Nahewirkungstheorie aus naheliegenden Weise verallgemeinerten. Ein Beweis, daß diese Gleichungen nun auch für ein jedes elektromagnetisches Feld gelten, läßt sich auf Grund der auf statische und stationäre Felder bezüglichen Erfahrungen selbstverständlich nicht erbringen. Die Maxwellsche Theorie unterscheidet sich ja gerade durch die Einführung des Verschiebungsstromes in die erste Hauptgleichung wesentlich von den in dem Boden der Fernwirkung wurzelnden Theorien, welche im Gebiete der Elektrostatik und des stationären Stromes die Erscheinungen ebensogut darstellen. Der Verschiebungsstrom ist aber der zeitlichen Änderung von $\mathfrak{E}$ proportional; er wird gegenüber dem Leitungsstrome um so mehr zur Geltung gelangen, je schneller die zeitlichen Änderungen des Feldes erfolgen. Daher waren die von Heinrich Hertz entdeckten, schnellen elektrischen Schwingungen für die experimentelle Prüfung der Maxwellschen Theorie von so großer Bedeutung.

Der Beweis der Feldgleichungen wird nicht anders zu erbringen sein als durch Entwicklung der Folgerungen, die sich für rasch wechselnde Felder aus ihnen ergeben Wir werden in den folgenden Kapiteln, insbesondere im dritten Kapitel dieses Abschnittes sehen, daß sich dieselben in guter Übereinstimmung mit den Tatsachen befinden.

Die Erweiterungen, die man neuerdings der Maxwellschen Theorie gegeben hat, lassen das Schema der Hauptgleichungen unverändert. Sie füllen es aber in einer etwas anderen Weise aus, indem sie die Beziehungen zwischen der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ und dem Leitungsstrom oder dem Verschiebungsstrom erweitern. Das erweist sich für anisotrope Körper als notwendig, sowie auch wenn man den oben erwähnten Hall-Effekt mathematisch zur Darstellung bringen will. Auch in der elektromagnetischen Lichttheorie hat man zur Erklärung der Dispersionserscheinungen die einfache Proportionalität der elektrischen Feldstärke und der elektrischen Verschiebung aufgegeben. Daher haben wir es zweckmäßig gefunden, hier zunächst die beiden Hauptgleichungen zu entwickeln und erst dann zu den Differen-

tialgleichungen des elektromagnetischen Feldes herabzusteigen, welche der Maxwellschen Theorie in engerem Sinne eigentümlich sind.

Die Ausdrücke (138) und (162) für die elektrische Feldenergie U und für die magnetische Feldenergie T konnten bisher als einigermaßen willkürlich gewählt erscheinen. Wir wollen jetzt zeigen, daß dem Energieprinzip genügt wird, wenn man die Energie eines elektromagnetischen Feldes der Summe jener beiden Ausdrücke gleichsetzt:

$$W = U + T = \int \frac{dv}{8\pi} \{ \varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2 \} . \tag{180a}$$

Wir führen den Beweis, indem wir die zeitliche Zunahme der Größe W berechnen und uns davon überzeugen, daß sie für ein abgeschlossenes elektromagnetisches Feld dem Überschuß der von den eingeprägten Kräften $\mathfrak{E}^e$ geleisteten Arbeit über die in den Leitern entwickelte Joulesche Wärme gleich ist. Es ist

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int dv \left\{ \left(\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \mathfrak{E} \right) + \left(\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \mathfrak{H} \right) \right\} .$$

Setzt man hier für $\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ und $\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$ die durch die beiden Feldgleichungen (180) gegebenen Werte ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{c}{4\pi} \int dv \{ (\mathfrak{E} \operatorname{curl} \mathfrak{H}) - (\mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{E}) \} \\ &+ \frac{c}{4\pi} \int dv (\mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{E}^e) - \int dv \sigma \mathfrak{E}^2 . \end{aligned} \tag{180b}$$

Das erste Integral auf der rechten Seite wird mit Hilfe der allgemeinen Formel (102a) in ein über die Begrenzungsfläche des Feldes erstrecktes Oberflächenintegral umgewandelt, nämlich in

$$- \frac{c}{4\pi} \int df [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_n .$$

Auf Grund derselben Formel geht das zweite Integral der rechten Seite über in

$$+ \frac{c}{4\pi} \int df [\mathfrak{E}^e \mathfrak{H}]_n + \frac{c}{4\pi} \int dv (\mathfrak{E}^e \operatorname{curl} \mathfrak{H}) ,$$

was mit Rücksicht auf (180) ergibt

$$+ \frac{c}{4\pi} \int df [\mathfrak{E}^e \mathfrak{H}]_n + \int dv (\mathfrak{E}^e \mathfrak{c}) ,$$

wenn wiederum, was hier zweckmäßig ist, die Dichte des wahren Stromes
$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \sigma \mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$$
eingeführt wird.

Das dritte Glied der rechten Seite von (180b) endlich gibt die in dem ganzen Felde entwickelte Joulesche Wärme an; denn diese beträgt

$$Q = \int dv\,(\mathfrak{i}\,\mathfrak{E}) = \int dv\,\sigma\,\mathfrak{E}^2. \tag{180c}$$

Wir erhalten also schließlich

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{c}{4\pi}\int df\,[\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e, \mathfrak{H}]_n + \int dv\,(\mathfrak{E}^e \mathfrak{c}) - Q. \tag{180d}$$

Wir denken uns nun das ganze Feld in eine Fläche eingeschlossen, welche im Verlaufe des ganzen Vorganges niemals von einer magnetischen Störung erreicht wird, auf der also $\mathfrak{H}$ stets gleich Null ist. Für das von der Fläche eingeschlossene System geht (180d) über in

$$\frac{dW}{dt} = \int dv\,(\mathfrak{E}^e \mathfrak{c}) - Q. \tag{180e}$$

Wir wollen zunächst den besonderen Fall ins Auge fassen, wo eingeprägte Kräfte $\mathfrak{E}^e$ nicht vorhanden sind. Dann besagt die zuletzt erhaltene Gleichung: Die zeitliche Abnahme der Größe W ist der entwickelten Jouleschen Wärme gleich. Da es sich hier um ruhende Körper handelt, wo weder kinetische Energie bewegter Massen noch etwa eine Arbeitsleistung mechanischer Kräfte in Frage kommt, so kann nach dem Energieprinzip die Größe W nur durch eine additive Konstante vom Werte der elektromagnetischen Energie abweichen; doch ist es das einfachste, diese so zu wählen, daß sie mit verschwindendem elektromagnetischen Felde gleich Null wird. So ergibt sich denn, wenigstens falls eingeprägte Kräfte $\mathfrak{E}^e$ fehlen, der Ausdruck (180a) für die gesamte elektromagnetische Energie mit Notwendigkeit aus den Feldgleichungen.

Wenn nun die Maxwellsche Theorie diese Gesamtenergie in bestimmter Weise, nämlich mit der Dichte

$$\psi = \frac{1}{8\pi}\{\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2\} \tag{180f}$$

über das Feld verteilt denkt, so liegt hierin allerdings eine gewisse Willkür. Wir hatten für gewisse besondere Felder auch andere Annahmen über die Verteilung als zulässig erkannt. Doch dürfte der Ansatz (180f) für die Energiedichte sich kaum durch einen andern, ebenso einfachen, ersetzen lassen, welcher die Energiedichte an jeder Stelle des Feldes nur von den daselbst herrschenden Feldstärken abhängig macht.

Nicht ganz so einfach liegt die Sache, wenn eingeprägte Kräfte $\mathfrak{E}^e$ wirken. Die nächstliegende Deutung der Beziehung (180e) ist dann die folgende.

Das erste Glied der rechten Seite stellt die von den eingeprägten elektrischen Kräften $\mathfrak{E}^e$ pro Zeiteinheit im ganzen Felde geleistete Arbeit dar:

$$\frac{dA}{dt} = \int dv\,(\mathfrak{E}^e \mathfrak{c}) = \int dv\left(\mathfrak{E}^e, \mathfrak{i} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right); \tag{180g}$$

es leisten nach dieser Auffassung die elektromotorischen Kräfte nicht nur dann Arbeit, wenn ein Leitungsstrom, sondern auch dann, wenn ein Verschiebungsstrom den Körper durchströmt, in welchem jene Kräfte ihren Sitz haben. Die Gleichung (180e) besagt nun: Die zeitliche Zunahme, welche die durch (180a) definierte Größe W erfährt, ist gleich dem Überschuß der von den eingeprägten elektrischen Kräften geleisteten Arbeit über die Joulesche Wärme. Die elektrische Energie ist dabei durch die gesamte elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ bestimmt, in welcher die eingeprägte Kraft $\mathfrak{E}^e$ mitgerechnet ist.

Es ist jedoch noch eine zweite, von jener abweichende Deutung der Beziehung (180e) möglich. Man kann setzen:

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E} = \varepsilon\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} + \varepsilon\mathfrak{E}^e.$$

Da nun die eingeprägte Kraft $\mathfrak{E}^e$ sich nicht ändert, so lange als der chemische und thermische Zustand des Körpers ungeändert bleibt, so gilt
$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\}.$$

Nun kann man (180e), indem man den Anteil des Verschiebungsstromes nach links schafft, schreiben:

$$\frac{1}{4\pi}\int dv\,\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}+\frac{1}{4\pi}\int dv\,\mathfrak{H}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}-\frac{1}{4\pi}\int dv\,\mathfrak{E}^e\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}$$

$$=\int dv\,(\mathfrak{E}^e\mathfrak{i})-Q, \qquad \text{und infolge von}$$

$$\left(\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^e,\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}\right)=\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^e)^2 \qquad \text{wird}$$

$$\frac{d}{dt}\int\frac{dv}{8\pi}\{\varepsilon(\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^e)^2+\mu\mathfrak{H}^2\}=\int dv\,(\mathfrak{E}^e\mathfrak{i})-Q.$$

Diese Form der Energiegleichung gestattet die Deutung, daß nicht (180g), sondern

(180h) $$\frac{dA'}{dt}=\int dv\,(\mathfrak{E}^e\mathfrak{i})$$

die Arbeitsleistung der eingeprägten Kräfte darstellt, und daß für die Energie, statt (180a), zu setzen ist:

(180i) $$W'=\int\frac{dv}{8\pi}\{\varepsilon(\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^e)^2+\mu\mathfrak{H}^2\}.$$

Der zweite Ansatz (180h) für die Arbeitsleistung der eingeprägten Kräfte ist von dem ersten nur dann verschieden, wenn dort, wo eingeprägte Kräfte wirken, ein Verschiebungsstrom stattfindet. Nach der ersten Annahme leisten die eingeprägten Kräfte dann Arbeit, nach der zweiten nicht; je nachdem man sich jener oder dieser Annahme anschließt, hat man im Ausdrucke der elektrischen Energie die eingeprägte Kraft $\mathfrak{E}^e$ mitzurechnen oder nicht. Man kann zwischen den beiden Annahmen wohl nur auf Grund bestimmter Vorstellungen über die Wirkungsweise der eingeprägten Kräfte entscheiden.

In einer wässerigen Lösung eines Elektrolyten wirken nach der osmotischen Theorie die von der ungleichmäßigen Zusammensetzung herrührenden osmotischen Kräfte $\mathfrak{E}^e$ nur auf die gelösten Ionen, welche den Leitungsstrom bilden. Finden nun elektrische Schwingungen in dem Lösungsmittel statt, so ist der Verschiebungsstrom wesentlich durch das Lösungsmittel bedingt, auf welches die osmotischen Kräfte nicht wirken. In diesem Falle wird also eine Arbeitsleistung der eingeprägten Kräfte nur beim Leitungsstrom, nicht beim Verschiebungsstrom in Rechnung zu ziehen sein, entsprechend der zweiten Auffassung. Hier ist in

der Tat die Verschiebung $\mathfrak{D}$ nicht der für den Leitungsstrom maßgebenden gesamten elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$, sondern dem Vektor $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e$ proportional, so daß von vornherein der Energieausdruck (180i) als der zutreffende erscheint.

§ 61. Maßeinheiten und Dimensionen.

Wir haben im § 52 gesehen, daß die verschiedenen absoluten Einheitssysteme der elektrischen Größen sich durch die Einheit und Dimension kennzeichnen ließen, welche der Dielektrizitätskonstanten ε zugeschrieben werden. Das sogenannte elektrostatische Maßsystem betrachtet ε als reine Zahl, deren Wert für den leeren Raum gleich 1 gesetzt wird. Wir wollen jetzt, nachdem wir die Verkettungsgleichungen der elektrischen und magnetischen Größen kennen gelernt haben, eine Übersicht über die verschiedenen absoluten Maßsysteme geben. In den Verkettungsgleichungen (180) kommen außer ε noch zwei Größen μ und c vor, über deren Dimension wir noch nichts ausgesagt haben; wir haben deren Dimension gerade darum zunächst unbestimmt gelassen, weil wir der Wahl des Maßsystemes nicht vorgreifen wollten. Wir wurden indessen durch das Energieprinzip dazu veranlaßt, die Konstante c in beide Hauptgleichungen aufzunehmen. Man kann sich jetzt auf Grund der Feldgleichungen (180) davon überzeugen, daß sich, welche Verfügung man auch über die Einheiten von ε und μ trifft, für die elektrische und die magnetische Energiedichte die gleiche Dimension ergibt. Zu diesem Zwecke multipliziere man die beiden Feldgleichungen über Kreuz; dabei kann man das mit der Leitfähigkeit σ behaftete Glied außer acht lassen, weil die Dimension von σ bereits in § 52 mit der Dimension von ε in Verbindung gebracht worden ist. Da die Bildung des Curl der Division durch eine Länge in bezug auf die Dimension äquivalent ist, so steht auf der einen Seite ein Ausdruck, dessen Dimension dem Quotienten aus elektrischer Energiedichte und dem Produkte von Länge, Zeit und c entspricht; die Dimension der anderen Seite hingegen ist dem Quotienten aus der magnetischen Energiedichte und dem Produkte aus Länge, Zeit und c gleichwertig. Hätten wir die universelle

Konstante c nur in eine der beiden Hauptgleichungen eingeführt, so würde es unmöglich sein, beiden Energiearten die vom absoluten Maßsystem vorgeschriebene Dimension zu geben.

Das absolute Maßsystem legt aber den zu wählenden Dimensionen noch eine weitere Einschränkung auf. Wir erkennen dieses, indem wir die linken und rechten Seiten der Feldgleichungen miteinander multiplizieren (der Leitungsstrom mag dabei wieder gestrichen werden, weil seine Dimension allgemein derjenigen des Verschiebungsstromes gleich gemacht ist). Dann heben sich die Dimensionen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ heraus, und man erhält

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = LT^{-1}. \tag{181}$$

Die hier auftretende Verbindung der drei Konstanten c, ε, μ hat demnach die Dimension einer Geschwindigkeit. Es ist, wie hier vorweg bemerkt werden mag, die Geschwindigkeit, mit der sich elektromagnetische Störungen in dem betreffenden Isolator fortpflanzen. Es dürfen also nur zweien der drei Konstanten willkürliche Dimensionen beigelegt werden, die Dimension der dritten ist dann durch (181) festgelegt. Das allgemeinste absolute Maßsystem der elektrischen und magnetischen Größen muß also die Dimension zweier der drei Konstanten unbestimmt lassen.

In der beigefügten Dimensionstafel sind in der ersten Spalte die Dimensionen von ε und c beliebig gelassen, und es ist, gemäß (181), μ die Dimension gegeben

$$\mu = L^{-2}T^{2}\varepsilon^{-1}c^{2}. \tag{181a}$$

Dabei geht die Dimension von c, entsprechend dessen Auftreten in den Verkettungsgleichungen der elektrischen und magnetischen Größen, nur in die Dimensionsformeln der letzteren ein, und zwar mit ganzzahligen Exponenten.

In der zweiten Spalte der Tafel hingegen sind die Dimensionen von μ und c beliebig, während ε, entsprechend (181), die Dimension erhalten hat

$$\varepsilon = L^{-2}T^{2}\mu^{-1}c^{2}. \tag{181b}$$

Hier sind die Dimensionsformeln der magnetischen Größen frei

Tafel der Dimensionen.

	Ausgedrückt in ε und c	Ausgedrückt in μ und c	Gaußsches System
Dielektrizitätskonstante ε	ε	$L^{-2} T^{2} \mu^{-1} c^{2}$	1
Permeabilität μ	$L^{-2} T^{2} \varepsilon^{-1} c^{2}$	μ	1
Elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2} \mu^{\frac{1}{2}} c^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}} c$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} c^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetische Induktion $\mathfrak{B}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} c$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Wahre Elektrizitätsmenge e	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}} c$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Raumdichte derselben ϱ	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{5}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}} c$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Freie Elektrizitätsmenge e'	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-2} \mu^{\frac{1}{2}} c^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Raumdichte derselben ϱ'	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2} \mu^{\frac{1}{2}} c^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Wahrer Magnetismus (nicht vorhanden) . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} c$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Raumdichte desselben ϱ_m	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{5}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} c$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$

Freier Magnetismus	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} c^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Raumdichte desselben ϱ_m'	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} c^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Potential der freien Elektrizität φ = elektromotorische Kraft E^e	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2} \mu^{\frac{1}{2}} c^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Potential des freien Magnetismus φ_m = magnetomotorische Kraft	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} c^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Elektrischer Strom J	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}} c$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
Wahre Stromdichte $\mathfrak{i}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}} c$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2}$
Freie Stromdichte $\mathfrak{i}'$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{5}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{\frac{1}{2}} c^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2}$
Vektorpotential des freien Stromes $\mathfrak{A}$ . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} c$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Elektrische Leitfähigkeit σ.	$T^{-1} \varepsilon$	$L^{-2} T \mu^{-1} c^2$	T^{-1}
Widerstand R	$L^{-1} T \varepsilon^{-1}$	$L T^{-1} \mu c^{-2}$	$L^{-1} T$
Kapazität K	$L \varepsilon$	$L^{-1} T^2 \mu^{-1} c^2$	L
Selbstinduktion L	$L^{-1} T^2 \varepsilon^{-1} c^2$	$L \mu$	L
Universelle Konstante c	c	c	$L T^{-1}$

von c, während in diejenigen der elektrischen Größen ganzzahlige Potenzen der Dimension von c eingehen.

Setzt man, in der ersten Spalte, für ε den Ausdruck (181b), so erhält man die Dimensionsformeln der zweiten Spalte. Umgekehrt kann man von der zweiten Spalte zur ersten übergehen, indem man für μ den Ausdruck (181a) einsetzt.

Man hat es indessen vorgezogen, das Maßsystem nicht sowohl möglichst allgemein zu lassen, als vielmehr es so einfach zu gestalten, wie es für den ins Auge gefaßten Zweck zulässig war. Dabei sind nun verschiedene Auffassungen möglich. Man kann beabsichtigen, in den Dimensionen den Unterschied von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ hervortreten zu lassen, so daß man etwa in einem gegebenen Falle prüfen kann, ob die Einführung von wahrer oder freier Elektrizität, von wahrem oder freiem Strome in eine Gleichung die angemessene ist. Dann wird man ε und μ eine Dimension geben und wird nur c als reine Zahl betrachten, deren Wert man dann konsequenterweise gleich 1 setzt. Dieser Auffassung entsprechen die Maßsysteme, die man das „elektrostatische“ und das „elektromagnetische“ nennt.

Im elektrostatischen System werden ε und c als reine Zahlen betrachtet, und der Wert von c wird gleich 1 gesetzt. Die Dimensionen dieses Systemes gehen aus den Formeln der ersten Spalte durch Streichen von ε und c hervor.

Im elektromagnetischen System dagegen sind μ und c reine Zahlen; c hat den Wert 1. Streicht man in den Formeln der zweiten Spalte μ und c, so erhält man die Dimensionsausdrücke dieses Systems.

Die Unterdrückung der Dimension von c macht sich dadurch bemerkbar, daß die Dimensionsausdrücke derselben elektrischen oder magnetischen Größe im elektrostatischen und elektromagnetischen System sich durch ganzzahlige Potenzen einer Geschwindigkeit unterscheiden. Man hat z. B., um eine elektromagnetisch gemessene Stromstärke auf elektrostatisches Maß umzurechnen, mit einer Geschwindigkeit zu multiplizieren; für diese Geschwindigkeit hat man experimentell gefunden $c = 3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$. Die

gleiche Geschwindigkeit bzw. eine ganze positive oder negative Potenz derselben tritt bei der Umrechnung der anderen Größen auf.

Während in diesen Systemen entweder die elektrischen oder die magnetischen Größen bevorzugt werden, werden in dem Gaußschen Maßsysteme elektrische und magnetische Größen als gleichberechtigt angesehen. Es werden nämlich die Konstanten ε und μ beide als reine Zahlen betrachtet, wodurch dann c nach (181) die Dimension einer Geschwindigkeit erhält, deren Zahlwert gleich 3×10^{10} ist. Elektrische und magnetische Feldstärke werden hier beide gleich der Wurzel aus einer Energiedichte, wahre und freie Elektrizität werden dimensionsgleich, ebenso wahrer und freier Strom. Die Dimensionen dieses auch von H. Hertz zugrunde gelegten Maßsystemes finden sich in der dritten Spalte der Tabelle. Ihre Angaben gehen aus denen der beiden ersten Spalten hervor, indem man c die Dimension einer Geschwindigkeit gibt, und in der ersten Spalte die Dimension von ε, in der zweiten die Dimension von μ streicht. Der von den neueren Weiterbildungen der Maxwellschen Theorie gemachten Annahme, daß das elektromagnetische Feld eigentlich als Feld im Äther zu betrachten ist, paßt sich dieses Dimensionssystem am besten an. Denn $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ werden hier wesensgleich, ε und μ sinken daher zum Range dimensionsloser Größen herab, deren Zahlwert für den Äther gleich 1 gesetzt wird. Dieses Gaußsche Maßsystem wird den weiteren Entwicklungen zugrunde gelegt werden.

Zweites Kapitel.

Elektrodynamik quasistationärer Ströme.

§ 62. Die Anwendung des Vektorpotentiales in der Elektrodynamik.

Wir stellen uns in diesem Kapitel die Aufgabe, den zeitlichen Verlauf elektrischer Ströme in ruhenden Leitern zu untersuchen. Den im vorigen Kapitel entwickelten Anschauungen gemäß haben wir uns die Wirkung eines elektrischen Stromes, der im ersten

Leiter fließt, auf einen zweiten Leitungskreis folgendermaßen vorzustellen. Der erste Strom erzeugt, der ersten Hauptgleichung entsprechend, ein magnetisches Feld $\mathfrak{H}$. Dieses gibt zu einem Induktionsflusse durch den zweiten Leiter Veranlassung, der wesentlich von der Permeabilität der im Felde befindlichen Körper abhängt. Er beträgt

$$\Phi = \int df \mathfrak{B}_n, \tag{182}$$

wobei f eine Fläche bezeichnet, die von der Leitlinie $\mathfrak{s}$ des zweiten Kreises berandet ist. Sobald sich dieser Induktionsfluß ändert, beeinflußt er dem Induktionsgesetz (179) gemäß den im zweiten Kreise fließenden Strom.

Nun läßt sich der stets quellenfreie Vektor $\mathfrak{B}$ als Curl des Vektorpotentiales $\mathfrak{A}$ darstellen. Wir haben in den §§ 55 und 57 gelernt, für ein stationäres magnetisches Feld das Vektorpotential zu berechnen, wenn die Stromverteilung bzw. die Magnetisierung der Körper bekannt war. Nach dem Stokesschen Satze (§ 20) erhalten wir für den Induktionsfluß

$$\Phi = \int \mathfrak{B}_n df = \int \operatorname{curl}_n \mathfrak{A} df = \oint \mathfrak{A} d\mathfrak{s}, \tag{182a}$$

und somit für die in dem geschlossenen Leitungskreis induzierte elektromotorische Integralkraft

$$-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\oint \mathfrak{A} d\mathfrak{s}. \tag{182b}$$

Die in einem geschlossenen Stromkreise induzierte elektromotorische Integralkraft ist proportional der zeitlichen Abnahme des längs der Leitlinie des Stromkreises erstreckten Linienintegrales des Vektorpotentiales.

Die in den §§ 55 und 57 gegebene Berechnung des Vektorpotentiales war, wie erwähnt, auf das Feld stationärer elektrischer Ströme beschränkt, indem die erste Hauptgleichung in der Form (169) zugrunde gelegt wurde. Für den Fall, daß die Permeabilität μ im ganzen Raume konstant ist, ließ sich das Vektorpotential durch Integration über das ganze Feld der quellenfreien

Strömung $\mathfrak{i}$ berechnen (170). Jetzt haben wir es indessen nicht mit einem stationären, sondern mit einem veränderlichen Strome zu tun. Hier ist streng genommen der Leitungsstrom $\mathfrak{i}$ nicht quellenfrei, er wird erst durch den Verschiebungsstrom zu einer quellenfreien Strömung ergänzt. Der erweiterten ersten Hauptgleichung gemäß ist hier das Vektorpotential nicht aus dem Leitungsstrome $\mathfrak{i}$, sondern aus dem wahren Strome $\mathfrak{c}$ zu berechnen. Tut man dieses, so kann man an der bisherigen Definition des Vektorpotentiales (§ 21) festhalten, als eines Vektors, dessen Divergenz gleich Null ist und dessen Komponenten der Laplaceschen bzw. der Poissonschen Gleichung genügen. Man kann so die bisherige Entwickelung formal auf das Feld beliebig rasch wechselnder Ströme übertragen, indem nur neben dem Leitungsstrome der Verschiebungsstrom berücksichtigt wird. Hierbei verliert indessen die Lösung ihre einfache physikalische Bedeutung; denn der Verschiebungsstrom ist nicht auf den Leiter beschränkt, sondern er erfüllt den ganzen umgebenden Isolator; auch ist seine Verteilung meist nicht bekannt, so daß dieser Ausdruck des Vektorpotentiales sich gar nicht auswerten läßt. Man ist also nicht imstande, auf Grund dieses Ausdruckes das Vektorpotential und, mit Hilfe der Gleichung (182b), die in einem benachbarten Leiter induzierte elektromotorische Integralkraft zu berechnen, wenn man es mit hochfrequenten Wechselströmen zu tun hat.

Es ist ja auch ohne weiteres einleuchtend, daß die Ausbreitung der von einem solchen Strome ausgehenden elektromagnetischen Erregung sich nicht durch Potentialausdrücke darstellen lassen wird. Denn diese Ausdrücke machen das Feld im Aufpunkte von den gleichzeitigen Zuständen in den Quellpunkten der Erregung abhängig, sie berücksichtigen nicht, daß die Störung Zeit gebraucht, um vom Quellpunkte zum Aufpunkte zu gelangen. Für die allgemeine Theorie des elektromagnetischen Feldes ist das Vektorpotential in der bisherigen Form ebensowenig verwertbar wie das skalare Potential der Elektrostatik.

Man kann allerdings die Potentiale für die Theorie rasch veränderlicher Felder verwertbar machen, indem man die Zeit der Ausbreitung in Rechnung zieht, also eine gewisse „Latenszeit“

einführt. Doch genügen die so abgeänderten Ausdrücke nicht mehr der Laplaceschen Gleichung, sondern der sogenannten Wellengleichung; die im ersten Abschnitte gegebenen Definitionen des skalaren und des Vektorpotentiales sind demgemäß wesentlich zu ändern, wenn man jenen Ausdrücken diese Benennung beizulegen wünscht. Wir kommen darauf im zweiten Bande dieses Werkes ausführlich zurück; hier im ersten Bande jedoch werden wir der bisherigen Definition gemäß das skalare Potential und das Vektorpotential aus den gleichzeitigen Ladungen und Strömen berechnen.

Wenn wir nun trotzdem in diesem Kapitel Vektorpotentiale verwenden, so schränken wir den Gültigkeitsbereich der Entwicklungen von vornherein sehr wesentlich ein. Wir beschränken ihn auf solche Fälle, wo der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom zu vernachlässigen ist. Wir beseitigen also gerade dasjenige, was die Maxwellsche Theorie von den in dem Boden der Fernwirkungsvorstellung wurzelnden Theorien trennt, und können daher nicht hoffen, Folgerungen zu finden, welche die Maxwellsche Theorie von den Fernwirkungstheorien unterscheiden. In den Gültigkeitsbereich der Entwicklungen dieses Kapitels fallen nur solche Systeme veränderlicher Ströme, deren Änderungszeit (Schwingungsdauer bei Wechselströmen) groß ist gegen die Zeit, welche die elektromagnetischen Störungen gebrauchen, um den Abstand zwischen den beiden entferntesten Punkten des Systemes zu durchmessen. Solche Ströme werden wir als quasistationär bezeichnen. Wir berechnen das magnetische Feld quasistationärer Ströme und dessen Energie so, als ob der Strom stationär wäre, und bestimmen aus dem so berechneten Felde die Induktionswirkungen. Ob wir in einem gegebenen Falle derart verfahren dürfen, das hängt, wie erwähnt, erstens von der Frequenz der Ströme ab und zweitens von ihrem Abstande. Auf dem Gebiete des gewöhnlichen Wechselstromes hat sich die Annahme quasistationären Stromes gut bewährt; bei den hochfrequenten Störungen indessen, mit denen die drahtlose Telegraphie arbeitet, versagt sie vielfach.

§ 63. Induktionswirkungen in einem aus zwei Stromringen bestehenden Systeme.

Wir denken uns zwei Stromringe, deren Entfernung so gering ist, daß den Bedingungen genügt wird, welche die Theorie der quasistationären Strömung stellt, und doch so groß, daß der kleinste Abstand der beiden Leiter groß gegen den Querschnittsradius eines jeden Leiters ist. Alsdann kann für die in der Nachbarschaft des zweiten Leiters liegenden Aufpunkte der erste Leiter als linear betrachtet werden und umgekehrt; für die gegenseitigen Induktionswirkungen kommen dann nicht die Querschnittsdimensionen, sondern nur die Leitlinien $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ der beiden Stromringe bzw. deren gegenseitige Lage in Betracht.

Es sei J_1 der im ersten Leiter fließende, etwa durch eingeprägte Kräfte unterhaltene Strom; nach Gleichung (168a) leitet sich das magnetische Feld bzw. die magnetische Induktion aus dem Vektorpotentiale ab:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\mu J_1}{c} \oint \frac{d\mathfrak{s}_1}{r}. \tag{183}$$

Dieser Gleichung liegt die Voraussetzung zugrunde, daß im ganzen Raume die Permeabilität die gleiche ist; diese Voraussetzung wollen wir zunächst festhalten.

Da wir nun im vorigen Paragraphen gelernt haben, den Induktionsfluß direkt durch das Linienintegral des Vektorpotentiales auszudrücken, so können wir uns die Berechnung des Vektors $\mathfrak{B}$ ersparen. Die Gleichung (182a) ergibt als Induktionsfluß, den der erste Leiter durch den zweiten sendet,

$$\Phi_{12} = \int \mathfrak{B}_{1n} df_2 = \oint \mathfrak{A}_1 d\mathfrak{s}_2 .$$

Führt man hier den Ausdruck (183) des Vektorpotentiales $\mathfrak{A}_1$ ein, so erhält man als Induktionsfluß, den der im ersten Leiter kreisende Strom J_1 durch eine vom zweiten Leiter begrenzte Fläche sendet,

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{12} J_1 = J_1 \frac{\mu}{c} \oint\oint \frac{d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_2}{r_{12}} . \tag{183a}$$

Der hier auftretende Koeffizient von J_1

(183b) $$L_{12} = \mu \oint\oint \frac{d\mathfrak{s}_1\, d\mathfrak{s}_2}{r_{12}} = \mu \oint\oint \frac{ds_1\, ds_2 \cos\eta}{r_{12}}$$

wird Koeffizient der gegenseitigen Induktion der beiden linearen Leiter genannt. Er ist der Permeabilität des raumerfüllenden Stoffes proportional, hängt aber im übrigen nur von der Form der beiden Leitlinien und ihrer gegenseitigen Lage ab. Es ist, behufs Auswertung des Ausdruckes für L_{12}, das innere Produkt aus je zwei gerichteten Stücken der Leitlinien der beiden linearen Leiter durch den Abstand der beiden Stücke zu dividieren und sodann über alle Paare je zweier solcher Stücke zu integrieren. Da das Ergebnis offenbar unabhängig davon ist, welchen Leiter man als ersten und welchen man als zweiten bezeichnet, so ist

(183c) $$L_{12} = L_{21}\,.$$

Andererseits ist der Induktionsfluß, den ein im zweiten Stromring fließender Strom J_2 durch den ersten sendet,
$$\Phi_{21} = \int \mathfrak{B}_{2n}\, df_1 = \oint \mathfrak{A}_2\, d\mathfrak{s}_1\,,$$

wofür, in entsprechender Weise, wie oben, erhalten wird

(183d) $$\Phi_{21} = \frac{1}{c} L_{21} J_2 = J_2 \frac{\mu}{c} \oint\oint \frac{d\mathfrak{s}_1\, d\mathfrak{s}_2}{r_{21}}\,.$$

Die Dimension des Induktionskoeffizienten ist gleich dem Produkte von Länge und Dimension der Permeabilität. In der Dimensionstafel des § 61 ist dies bereits berücksichtigt und für L in jeder der drei Spalten der betreffende Dimensionsausdruck eingeführt worden. Im Gaußschen System, wo μ eine reine Zahl ist, wird L_{12} eine Länge.

Wenn wir nun die Induktionswirkungen in dem betrachteten Systeme zweier quasistationärer elektrischer Ströme erschöpfend darstellen wollen, so haben wir in Betracht zu ziehen, daß durch eine von der Leitlinie des zweiten Stromkreises umrandete Fläche nicht nur der erste Strom, sondern auch der zweite Strom selbst einen Induktionsfluß hindurchsendet. Eine elektromotorische Integralkraft wird daher in jedem der beiden Leiter nicht nur dann

induziert, wenn die Stromstärke in dem anderen, sondern auch, wenn die Stromstärke in dem betreffenden Leiter selbst sich ändert. Der gegenseitigen Induktion tritt daher die Selbstinduktion an die Seite.

Bei der Berechnung des Koeffizienten der Selbstinduktion tritt nun eine Schwierigkeit auf. Es ist bei der Bestimmung des Vektorpotentiales in den Punkten eines Leiters der in dem Leiter selbst fließende Strom nicht als linearer Strom zu betrachten, da die Entfernung je zweier Leiterstücke durchaus nicht immer groß gegen die Querschnittsdimensionen ist. Das magnetische Feld in der Nachbarschaft des Stromes und der Induktionsfluß, den er durch sich selbst hindurchsendet, hängt daher wesentlich von der Gestalt des Querschnittes ab. Auch ist die Wahl der Leitlinie mit einiger Willkür verbunden. Behufs eindeutiger Festlegung der Koeffizienten der Selbstinduktion müssen wir anders verfahren.

Wir gehen zurück auf den Ausdruck (170b), auf den wir die magnetische Energie eines stationären Stromsystemes gebracht hatten und der ganz allgemein gilt:

$$T = \frac{1}{2c}\int dv\,(\mathfrak{i}\mathfrak{A}). \tag{184}$$

Wir wollen das Stromfeld in Stromfäden zerlegen und einen einzelnen Stromfaden betrachten; es ist der Rauminhalt eines Stückchens des Stromfadens $dv = q\,ds$, wo q seinen Querschnitt, ds seine Länge bedeutet. Der Beitrag, den dieser Faden zur magnetischen Energie beisteuert, ist gleich

$$\frac{1}{2c} q\,|\mathfrak{i}| \oint \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} = \frac{1}{2c} q\,|\mathfrak{i}|\,\Phi.$$

Dabei bedeutet $q\,|\mathfrak{i}|$ die Stromstärke des Fadens, Φ nach (182a) den Induktionsfluß durch eine von dem Faden umrandete Fläche. Um die magnetische Energie des Stromsystemes zu berechnen, hat man für jeden Stromfaden das Produkt aus Stromstärke und umschlungenem Induktionsfluß zu bilden, über alle Stromfäden zu integrieren und das Integral durch $2c$ zu teilen.

Wir wenden dieses Ergebnis auf unser Problem an, indem wir den Induktionsfluß in zwei Teile zerlegen, den vom ersten und den vom zweiten Strome erzeugten. Der vom ersten Strome erzeugte Induktionsfluß ist für alle Stromfäden des zweiten Stromes merklich der gleiche, da wir ja die Entfernung groß gegen die Querschnittsabmessungen annahmen. Der zweite Stromring ist hier als Stromfaden anzusehen und der entsprechende Energieanteil gleich

$$\frac{1}{2c} J_2 \cdot \frac{1}{c} L_{12} J_1 = \frac{1}{2c^2} L_{12} J_1 J_2 \qquad \text{zu setzen.}$$

Entsprechend ergibt der vom zweiten Strom durch den ersten gesandte Induktionsfluß einen Energieanteil

$$\frac{1}{2c} J_1 \cdot \frac{1}{c} L_{21} J_2 = \frac{1}{2c^2} L_{21} J_2 J_1 .$$

Die Summe der beiden von der wechselseitigen Induktion der beiden Ströme herrührenden Energieanteile ist nach (183c)

$$T_{12} = \frac{L_{12}}{c^2} J_1 J_2 . \tag{184a}$$

Hierzu treten diejenigen Energieanteile, welche von dem Induktionsfluß herrühren, den jeder der beiden Ströme durch seine eigenen Stromfäden hindurchsendet. Diese Anteile bezeichnen wir mit T_{11}, T_{22} und erhalten

$$T = T_{11} + T_{12} + T_{22} . \tag{184b}$$

T_{11} ist von der Anwesenheit des zweiten Stromes ganz unabhängig. Sein Wert hängt nur von dem ersten Strome ab. Steigert man dessen Stromstärke J_1, so nimmt T_{11} dem Quadrate von J_1 proportional zu. Denn es wachsen die Stromstärken der einzelnen Fäden und daher auch die Induktionsflüsse alle wie J_1. Setzen wir

$$T_{11} = \frac{1}{2} \frac{L_{11}}{c^2} J_1^2 , \tag{184c}$$

so ist L_{11} eine mit L_{12} dimensionsgleiche Größe, welche nur von der Beschaffenheit des ersten Leiters abhängt, übrigens aber der Permeabilität proportional ist, die innerhalb und außerhalb des Leiters durchweg den gleichen Wert besitzen mag. Wir nennen L_{11} den „Selbstinduktionskoeffizienten" des ersten Leiters.

Wir behandeln zunächst den besonderen Fall eines einzelnen Stromkreises. Führt man in (184) den Ausdruck (170) des Vektorpotentiales ein, so erhält man für die Energie eines einzelnen Stromkreises
$$T = \frac{\mu}{2c^2}\int dv' \int \frac{dv''}{r}(\mathfrak{i}'\mathfrak{i}'').$$

Dabei bezeichnen dv', dv'' je zwei in der Entfernung r voneinander befindliche Stücke des Stromkreises. Jedes Paar zweier Stücke kommt zweimal vor, einmal nämlich steuert das eine, das andere Mal das andere seinen Beitrag zum Vektorpotential bei. Nimmt man jedes Paar nur einmal, so ist zu setzen

$$T = \frac{\mu}{c^2}\int\int \frac{dv'\,dv''}{r}(\mathfrak{i}'\mathfrak{i}''). \tag{184d}$$

Ist J die Stromstärke dieses Kreises, so ist der Selbstinduktionskoeffizient L gemäß (184c) zu definieren durch

$$\frac{1}{2}LJ^2 = \mu\int\int \frac{dv'\,dv''}{r}(\mathfrak{i}'\mathfrak{i}''). \tag{184e}$$

Der Quotient L/μ hängt nur von der Beschaffenheit des Leiters ab; denn die Stromverteilung ist — wofern sie mit der Verteilung des stationären Stromes übereinstimmt — von der Stromstärke unabhängig, die Quotienten $\mathfrak{i}'/J$, $\mathfrak{i}''/J$ haben demnach Beträge und Richtungen, die nur von der geometrischen und physikalischen Beschaffenheit des Stromkreises, nicht aber von der Stromstärke J abhängen. Hat man es mit einem durchweg homogenen Leiter zu tun, dessen Permeabilität gleich 1 ist und der sich im Luftraume befindet, so ist L durch die geometrische Form des Leiters allein bestimmt. Dabei kommt nicht nur die Form der Leitlinie, sondern auch diejenige des Querschnittes in Betracht. Bei schnellen elektrischen Schwingungen allerdings kann, auch wenn im übrigen die Voraussetzungen der quasistationären Strömung erfüllt sind, die Stromverteilung von derjenigen des stationären Stromes abweichen. Alsdann hängt auch L von der Frequenz der Schwingungen ab. Doch würde es an dieser Stelle zu weit führen, wenn wir auf diese Fragen eingehen wollten (vgl. § 78). Für langsame Stromschwankungen ist der Selbstinduktionskoeffizient eines Stromringes

nunmehr eindeutig durch die magnetische Energie bestimmt.

Wir setzen also für die magnetische Energie eines einzelnen Stromkreises

$$T = \frac{1}{2c^2} LJ^2. \tag{185}$$

Wir wollen nun diesen Leiter für sich betrachten und Wechselwirkungen mit anderen Leitern ausschließen. Welche Energieumsetzungen finden dann statt?

Während bei Gleichstrom die Arbeitsleistung JE^e der eingeprägten Kräfte gleich der Jouleschen Wärme J^2R ist, trifft dies bei einem Wechselstrome nicht mehr zu. Vielmehr muß eine Abnahme der magnetischen Feldenergie in einem Überschuß der entwickelten Jouleschen Wärme über die Arbeitsleistung der eingeprägten elektrischen Kräfte ihr Äquivalent finden; es lautet demnach die Energiegleichung für einen einzelnen Stromkreis

$$J^2R - JE^e = -\frac{dT}{dt}. \tag{185a}$$

Setzt man für T den Ausdruck (185) ein, in dem L konstant ist, und teilt durch J, so folgt

$$JR - E^e = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(LJ). \tag{185b}$$

Hier ist nun die rechte Seite als elektromotorische Integralkraft der Selbstinduktion anzusprechen. Wie der Vergleich mit dem Induktionsgesetze (179) lehrt, ist

$$\Phi = \frac{1}{c} LJ \tag{185c}$$

als der von dem Stromring durch sich selbst hindurch gesandte Induktionsfluß anzusehen, um die Energiegleichung mit dem Induktionsgesetze in Einklang zu bringen.

Zu unserem Systeme zweier Stromringe zurückkehrend, erhalten wir für die gesamte magnetische Energie

$$T = \frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{2} L_{11}J_1^2 + L_{12}J_1J_2 + \frac{1}{2} L_{22}J_2^2\right\}. \tag{186}$$

Was nun die Induktionsflüsse anbelangt, so ist zu dem selbsterregten Induktionsflusse (185c) jedesmal der von dem anderen

Stromkreise herrührende Induktionsfluß hinzuzufügen. So erhält man für die gesamten Induktionsflüsse

(186a) $$\Phi_1 = \frac{1}{c}\{L_{11}J_1 + L_{12}J_2\},$$

(186b) $$\Phi_2 = \frac{1}{c}\{L_{12}J_1 + L_{22}J_2\}.$$

Nunmehr ergibt die Anwendung des Induktionsgesetzes (179) auf jeden der beiden Kreise

(186c) $$J_1 R_1 - E_1^e = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_1}{dt},$$

(186d) $$J_2 R_2 - E_2^e = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_2}{dt}.$$

Diese beiden Gleichungen bleiben übrigens auch für bewegte Leiter gültig. Beschränken wir uns an dieser Stelle auf den Fall der Ruhe, wo mechanische Energie und Arbeit nicht in Betracht kommen, so muß die Energiegleichung lauten:

(186e) $$J_1^2 R_1 + J_2^2 R_2 - J_1 E_1^e - J_2 E_2^e = -\frac{dT}{dt},$$

d. h. der Überschuß der in beiden Kreisen erzeugten Jouleschen Wärme über die Arbeit der eingeprägten elektrischen Kräfte muß der Abnahme der magnetischen Feldenergie gleich sein.

Wir wollen uns davon überzeugen, daß diese Gleichung in der Tat erfüllt ist. Aus (186c, d) folgt:

$$J_1(J_1 R_1 - E_1^e) + J_2(J_2 R_2 - E_2^e) = -\frac{1}{c}\left\{J_1\frac{d\Phi_1}{dt} + J_2\frac{d\Phi_2}{dt}\right\}.$$

Da im Falle der Ruhe die Koeffizienten der Selbstinduktion und der gegenseitigen Induktion konstant sind, so folgt aus (186a, b) und (186)

$$-\frac{1}{c}\left\{J_1\frac{d\Phi_1}{dt} + J_2\frac{d\Phi_2}{dt}\right\}$$

$$= -\frac{1}{c^2}\left\{J_1\left(L_{11}\frac{dJ_1}{dt} + L_{12}\frac{dJ_2}{dt}\right) + J_2\left(L_{12}\frac{dJ_1}{dt} + L_{22}\frac{dJ_2}{dt}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{2}L_{11}\frac{dJ_1^2}{dt} + L_{12}\frac{d(J_1J_2)}{dt} + \frac{1}{2}L_{22}\frac{dJ_2^2}{dt}\right\} = -\frac{dT}{dt}.$$

Es ist also die Energiegleichung (186e) wirklich erfüllt.

Wir haben uns bei der Berechnung der Induktionskoeffizienten auf den Fall durchweg konstanter Permeabilität beschränkt. Diese Einschränkung war indessen nur zur Ableitung der Formeln (183b), (184e) erforderlich, welche die Induktionskoeffizienten

bzw. die magnetische Energie auf eine Form bringen, die mehr der Fernwirkungstheorie als der Nahewirkungstheorie angepaßt ist. Es leuchtet ein, daß diese Ausdrücke abzuändern sind, wenn ein Körper abweichender Permeabilität in das Feld gebracht wird. Denn dieser Körper verändert das magnetische Feld und den Betrag der magnetischen Feldenergie. Andererseits ist klar, daß dem Ausdruck (186) der magnetischen Energie eine allgemeinere Gültigkeit zukommt; denn die magnetische Energie des Feldes

$$T = \frac{1}{8\pi}\int dv \mu \mathfrak{H}^2$$

kann stets — wofern μ von der Feldstärke unabhängig ist — in drei Teile zerlegt werden:

$$T = \frac{1}{8\pi}\left\{\int dv \mu \mathfrak{H}_1^2 + 2\int dv \mu \mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 + \int dv \mu \mathfrak{H}_2^2\right\},$$

wo $\mathfrak{H}_1$ die vom ersten, $\mathfrak{H}_2$ die vom zweiten Strome erregte magnetische Kraft ist. Da aber die Grundgleichungen linear sind, so ist $\mathfrak{H}_1$ proportional J_1, $\mathfrak{H}_2$ proportional J_2; mithin ist der erste Teil der magnetischen Energie proportional zu J_1^2, der zweite zu $J_1 J_2$, der dritte zu J_2^2. Damit ist bewiesen, daß die magnetische Feldenergie stationärer Ströme sich stets in der Form (186), d. h. als Funktion zweiten Grades der Stromstärken darstellen lassen muß, deren Koeffizienten von der Beschaffenheit und Form der im Felde befindlichen Körper abhängen, von den Stromstärken aber unabhängig sind. Diese Schlußweise versagt nur bei ferromagnetischen Körpern; hier hängt μ von der Feldstärke ab; es sind daher auch die Grundgleichungen nicht linear; endlich ist auch der zugrunde gelegte Energieausdruck bei diesen Körpern abzuändern, wie bereits in § 55 bemerkt worden ist.

Es mag nochmals ausdrücklich bemerkt werden, daß die Anwendung des Energieausdruckes (186) quasistationäre Strömung voraussetzt; denn die Energie ist von den gleichzeitigen Werten der Stromstärken abhängig gemacht, sie ist der Energie des stationären Stromes gleichgesetzt worden. Die Anwendung auf veränderliche Ströme zur Bestimmung der Induktionswirkungen unterliegt daher den im vorigen Paragraphen angeführten Einschränkungen.

§ 64. Mechanische Kräfte auf Stromleiter.

Wir machen, um verwickeltere Betrachtungen zu vermeiden, auch weiter die Annahme, daß im ganzen Raume, im Isolator sowohl wie in dem durchströmten Leiter, die Permeabilität den gleichen Wert habe. Alsdann ergibt der allgemeine Ausdruck (178), der in § 58 für die mechanische Kraft des magnetischen Feldes gewonnen wurde,

$$\mathfrak{f}^m = \left[\frac{\mathfrak{i}}{c}\,\mathfrak{B}\right] \tag{187}$$

für die auf die Volumeinheit bezogene Kraft. Daraus folgt, entsprechend wie Gl. (178a), als Kraft, die an einem Stück $d\mathfrak{s}$ eines linearen Leiters angreift,

$$\mathfrak{K}^m = J \cdot \frac{1}{c}\,[d\mathfrak{s}\mathfrak{B}]\,. \tag{187a}$$

In diesem Paragraphen sollen nun die mechanischen Wechselwirkungen in einem aus zwei Stromringen bestehenden System betrachtet und zu den Induktionswirkungen sowie zur magnetitischen Energie in Beziehung gesetzt werden.

Die Arbeit, welche die Kraft (187a) bei einer virtuellen, durch den Vektor $\mathfrak{q}$ dargestellten Verrückung des Stromstückes leistet, beträgt

$$\mathfrak{q}\mathfrak{K}^m = \frac{J}{c}\,\mathfrak{q}\,[d\mathfrak{s}\mathfrak{B}]\,,$$

oder, nach Regel (23),

$$\mathfrak{q}\mathfrak{K}^m = \frac{J}{c}\,\mathfrak{B}\,[\mathfrak{q}\,d\mathfrak{s}]\,. \tag{188}$$

Nun stellt das äußere Produkt von $\mathfrak{q}$ und $d\mathfrak{s}$ das Parallelogramm dar, welches das Leiterstück $d\mathfrak{s}$ bei der Verrückung $\mathfrak{q}$ beschreibt; ihm ist ein normaler Vektor zuzuordnen, dessen Sinn mit demjenigen übereinstimmt, in welchem der Induktionsfluß durch das Parallelogramm als positiv gilt. Es besagt also die Gl. (188): Die virtuelle Arbeit, welche die mechanische Kraft des magnetischen Feldes bei einer Verrückung des Stromstückes leistet, ist gleich seiner elektromagnetisch gemessenen Stromstärke, multipliziert mit dem Induktionsflusse durch das bei der Verrückung bestrichene Parallelogramm.

Wir betrachten jetzt einen geschlossenen, vom Gleichstrome J durchflossenen linearen Leiter; man erteile seinen Stücken beliebige virtuelle Verrückungen von der Art, daß der Leiter ein geschlossener bleibt. Das über die Leitlinie erstreckte Integral

$$\delta \Phi = \oint \mathfrak{B}\,[\mathfrak{q}\, d\mathfrak{s}] \tag{189}$$

bedeutet den Zuwachs, den der Induktionsfluß Φ durch eine von der Leitlinie $\mathfrak{s}$ umrandete Fläche bei der angenommenen Verrückung erfährt. Denn jene unendlich kleinen Parallelogramme ergeben zusammen den gesamten Zuwachs der berandeten Fläche, und die Induktionsflüsse durch alle diese Parallelogramme sind in (189), mit dem richtigen Vorzeichen versehen, addiert.

Summiert man andererseits die virtuellen Arbeiten (188) der an den einzelnen Stromstücken angreifenden Kräfte, so ergibt sich für die gesamte Arbeit, nach (189), der Ausdruck

$$\delta A = J/c \cdot \delta \Phi\,. \tag{190}$$

Demnach ist die Arbeit, welche die bewegenden Kräfte des magnetischen Feldes bei einer Verrückung eines geschlossenen linearen Leiters leisten, gleich der elektromagnetisch gemessenen Stärke des in dem Leiter fließenden Stromes, multipliziert mit dem Zuwachse, den der Induktionsfluß durch eine vom linearen Leiter berandete Fläche bei der Verrückung erfährt.

Dieser Satz gilt, mag nun der magnetische Induktionsfluß von einem anderen Stromkreise oder von einem Magneten erregt sein. Auch kann die Verrückung des Leiters, je nach seinen kinematischen Eigenschaften, die eines starren Körpers sein oder auch mit einer Formänderung der Leitlinie verknüpft sein. Stets ist der Leiter bestrebt, diejenige Lage einzunehmen, bei der er einen unter den gegebenen Umständen möglichst großen Induktionsfluß umschlingt.

Man beachte die enge Verknüpfung zwischen den mechanischen und elektromotorischen Kräften. Würde der Leiter, den auf ihn wirkenden mechanischen Kräften folgend, sich so bewegen, daß deren Arbeit positiv ist, so würde der dabei statt-

findende Zuwachs des umschlungenen Induktionsflusses eine induzierte Integralkraft in negativem, d. h. dem schon bestehenden Strome entgegengerichteten Sinne hervorrufen. Dieses Gesetz bestätigt das Experiment.

Die Gleichung (190) läßt sich ohne weiteres auf die mechanischen Wechselwirkungen zweier linearer Leiter anwenden. Der Induktionsfluß, welchen der erste Leiter durch den zweiten sendet, beträgt, nach (183a), $\Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{12} J_1$.

Da nun bei einer Verrückung des zweiten Leiters sich nur der von der gegenseitigen Lage der beiden Leitlinien abhängige Induktionskoeffizient, aber nicht J_1, die Stromstärke im ersten Leiter, ändert, so ist

$$\delta A = J_2 \cdot \frac{1}{c} \delta \Phi_{12} = J_1 J_2 \cdot \frac{1}{c^2} \delta L_{12}. \tag{191}$$

Führt man hier den von der gegenseitigen Induktion der beiden Ströme herrührenden Energieanteil (184a) ein:

$$T_{12} = J_1 J_2 \frac{1}{c^2} L_{12},$$

so sieht man, daß die virtuelle Arbeit der zwischen den Leitern wirkenden Kräfte gleich der Zunahme ist, welche dieser Energieanteil bei der Verrückung erfährt, wofern man dieselbe bei konstant gehaltenen Stromstärken ausgeführt denkt. Man kann also die virtuelle Arbeit der wechselseitigen bewegenden Kräfte gleich der Abnahme eines „elektrodynamischen Potentiales der Wechselwirkung“ Ψ_{12} setzen:

$$\delta A = -\delta \Psi_{12}, \tag{192}$$

welches gleich der mit (— 1) multiplizierten, wechselseitigen magnetischen Energie ist

$$\Psi_{12} = -T_{12} = -J_1 J_2 \frac{1}{c^2} L_{12}; \tag{193}$$

seine Variation ist bei konstanten Stromstärken ausgeführt zu denken; so gelangt man in der Tat, von (192) und (193) ausgehend, zu (191) zurück.

Bei durchweg konstanter Permeabilität gilt, gemäß (183b), für das elektrodynamische Potential

(193a) $$\Psi_{12} = - T_{12} = - J_1 J_2 \frac{\mu}{c^2} \oint\oint \frac{d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_2}{r_{12}},$$

ein Ausdruck, den bereits F. E. Neumann, von einer Fernwirkungstheorie ausgehend, erhalten hat.

Die Gleichung (187a) ist nicht anwendbar, wenn es sich um die Kräfte handelt, welche das Magnetfeld eines Stromes auf den eigenen Stromleiter ausübt; denn für das eigene Feld ist der Leiter nicht als linear zu betrachten, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben. Wir können jedoch die nämliche Betrachtungsweise anwenden wie dort, indem wir uns den Strom in dünne, geschlossene Stromfäden zerlegt denken. Das Potential der elektrodynamischen Wechselwirkungen je zweier Stromfäden ist dann nach dem obigen entgegengesetzt gleich ihrer wechselseitigen magnetischen Energie; die Potentiale aller möglichen Paare von Stromfäden summierend, erhält man als Gesamtpotential die negativ genommene Energie des ganzen Stromkreises

(194) $$\Psi = - T = - \frac{1}{2c^2} L J^2.$$

Auch hier ist natürlich die Variation des Potentiales bei konstant gehaltener Stromstärke ausgeführt zu denken, so daß die virtuelle Arbeit der elektrodynamischen Kräfte beträgt

(194a) $$\delta A = - \delta \Psi = \frac{1}{2c^2} J^2 \delta L.$$

Befindet sich z. B. in einem Leitungskreise ein Gleitstück, welches längs einer Schiene verschieblich ist, so sucht die durch den Strom selbst hervorgerufene elektrodynamische Kraft das Gleitstück im Sinne des wachsenden L zu verschieben, d. h. so, daß bei der der Verschiebung der Induktionsfluß, den der Strom durch den eigenen Leitungskreis sendet, zunimmt. Legt man die x-Achse in Richtung der Schiene, so ist die Kraft

(194b) $$\mathfrak{K}_x = \frac{1}{2c^2} J^2 \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Auch für ein aus zwei Stromkreisen bestehendes System ist das gesamte elektrodynamische Potential gleich seiner negativ genommenen magnetischen Energie:

$$(195) \quad \Psi = -T = -\frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2\right\}.$$

Es beträgt somit die Arbeit der elektrodynamischen Kräfte bei einer Verrückung oder Formänderung der Leiter

$$(195\text{a}) \quad \delta A = -\delta \Psi = \frac{1}{2c^2} J_1^2 \delta L_{11} + \frac{1}{c^2} J_1 J_2 \delta L_{12} + \frac{1}{2c^2} J_2^2 \delta L_{22};$$

denn die Stromstärken sind bei der Verrückung konstant zu halten.

§ 65. Der elektrische Strom als zyklisches System. Die Lagrangeschen Gleichungen.

Dieser Paragraph wendet sich nur an solche Leser, denen aus der analytischen Mechanik die Lagrangeschen Gleichungen bekannt sind. Diese Gleichungen beziehen sich auf ein mechanisches System, dessen jeweilige Konfiguration durch gewisse Parameter p_λ gekennzeichnet ist; die Zahl n dieser Parameter soll der Zahl der Freiheitsgrade des Systems gleich sein, so daß die Parameter voneinander unabhängig sind. Von diesen Parametern und von deren Änderungsgeschwindigkeiten q_λ hängt die lebendige Kraft T des Systemes ab. Ist diese Abhängigkeit bekannt, so ergeben die Lagrangeschen Gleichungen die Trägheitskräfte, die von den Massen des Systemes hervorgerufen werden. Es sei P_λ die dem Parameter p_λ entsprechende Trägheitskraft, und ihre gesamte Arbeit bei einer Konfigurationsänderung

$$\delta A = \sum_{\lambda=1}^{n} P_\lambda \delta p_\lambda .$$

Alsdann lauten die Lagrangeschen Gleichungen:

$$(196) \qquad P_\lambda = \frac{\partial T}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}\right) \quad \text{für } \lambda = 1, 2 \cdots n.$$

Um die Wirkungen der Trägheit der Massen des Systemes zu finden, braucht also das System keineswegs im einzelnen genau bekannt zu sein. Es genügt, wenn man seine lebendige Kraft in ihrer Abhängigkeit von den Parametern p_λ und den Geschwindigkeiten q_λ kennt.

Um nun die Lagrangeschen Gleichungen auf das System von zwei Stromringen anzuwenden, welches in den beiden letzten

Paragraphen behandelt worden ist, stelle man sich vor, daß in dem Felde eines elektrischen Stromes irgendeine unseren Sinnen verborgene Bewegung vor sich gehe. Das war in der Tat eine der Arbeitshypothesen, von denen Maxwell sich leiten ließ. Entsprechend der Verteilung der Energie über das Feld soll diese Bewegung nicht auf die Stromleiter beschränkt sein, sondern sie soll den umgebenden Raum erfüllen. Ihre lebendige Kraft soll der magnetischen Energie gleich sein, die von Maxwell daher auch als „elektrokinetische Energie“ bezeichnet worden ist. Für stationäre und quasistationäre Ströme ist somit die lebendige Kraft der verborgenen Bewegung durch (186) als Funktion zweiten Grades der Stromstärken gegeben. Ihre Koeffizienten hängen von der Gestalt und der gegenseitigen Lage der Stromleiter ab.

Der elektrische Strom gehört, vom Standpunkte dieses mechanischen Bildes aus betrachtet, einer Klasse von Bewegungen an welche von Helmholtz als zyklische Bewegungen bezeichnet worden sind. Die Parameter, welche die augenblickliche Lage eines zyklischen Systemes kennzeichnen, lassen sich in zwei Gruppen sondern. Die Parameter der einen Gruppe ändern sich während der Bewegung gar nicht oder doch so langsam, daß die ihren Änderungsgeschwindigkeiten entsprechenden Glieder im Ausdrucke der lebendigen Kraft zu vernachlässigen sind. Diese Parameter gehen mithin zwar selbst im allgemeinen in den Ausdruck der lebendigen Kraft ein, aber nicht ihre Ableitungen nach der Zeit. Dieser ersten Gruppe gehören in dem vorliegenden Falle diejenigen Parameter an, welche die Lage der Stromkreise bestimmen. Die Parameter der zweiten Gruppe hingegen, die wir zyklische Parameter nennen wollen, kommen zwar selbst nicht im Ausdrucke der lebendigen Kraft vor, wohl aber ihre Ableitungen nach der Zeit, die zyklischen Geschwindigkeiten. In unserem Falle mögen als zyklische Geschwindigkeiten die Stromintensitäten gewählt werden; die zyklischen Parameter sind dann deren Integrale nach der Zeit, von einem bestimmten Zeitpunkte an gerechnet, d. h. die Elektrizitätsmengen, die seitdem durch die Querschnitte der beiden Leiter hindurchgeströmt

sind; dieselben gehen nicht in den Ausdruck der lebendigen Kraft ein.

Ein anderes Beispiel für eine zyklische Bewegung ist eine inkompressible Flüssigkeit, die in einer geschlossenen Röhre strömt und dieselbe ganz erfüllt. Hier tritt bei der zyklischen Bewegung immer ein Teilchen an die Stelle des anderen, indem es dessen Geschwindigkeit annimmt. Die lebendige Kraft hängt daher von der Lage der einzelnen Flüssigkeitsteilchen nicht ab; sie ist bei gegebener Form der Röhre bestimmt durch die Flüssigkeitsmenge, die pro Sekunde die Querschnitte durchströmt. Dieses ist hier die zyklische Geschwindigkeit. Ein solches System mit nur einem zyklischen Parameter wird als Monozykel bezeichnet.

In dem hydrodynamischen Beispiele können wir von der mechanischen Bedeutung der zyklischen Geschwindigkeit Rechenschaft geben. Im Falle des elektrischen Stromes ist dieses nicht ohne neue, das mechanische Bild genauer zeichnende Hypothesen möglich. Bei der Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen brauchen wir indessen die zyklische Bewegung nicht genauer zu beschreiben; es kommt nur auf den Ausdruck der lebendigen Kraft T an; aus diesem können wir alles ableiten, was der Wahrnehmung zugänglich ist, nämlich die elektromotorischen und die mechanischen Kräfte.

Das zyklische System, auf welches wir die Lagrangeschen Gleichungen anwenden wollen, hat zwei zyklische Parameter p_1, p_2; es wird daher als „Bizykel" bezeichnet. Die betreffenden zyklischen Geschwindigkeiten q_1, q_2 sollen mit den Stromintensitäten übereinstimmen. Die entsprechenden verallgemeinerten Kraftkomponenten sind die elektromotorischen Kräfte, die beim Durchgang der Elektrizität Arbeit leisten. Wir setzen

$$J_1 = q_1 c, \qquad J_2 = q_2 c, \tag{196a}$$

so daß die zyklischen Parameter p_1, p_2 die elektromagnetisch gemessenen Elektrizitätsmengen sind, die von einem bestimmten Zeitpunkte an die Querschnitte der beiden Stromringe durchflossen haben. Dann wird, nach (186), die lebendige Kraft des Bizykels

$$T = \frac{1}{2} L_{11} q_1^2 + L_{12} q_1 q_2 + \frac{1}{2} L_{22} q_2^2. \tag{196b}$$

Differentiation nach q_1 und q_2 und Vergleichung mit (186a, b) ergibt

$$(196c)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = L_{11} q_1 + L_{12} q_2 = \Phi_1, \\ \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = L_{12} q_1 + L_{22} q_2 = \Phi_2. \end{cases}$$

Die Ableitungen der lebendigen Kraft nach den zyklischen Geschwindigkeiten werden in der Mechanik als zyklische Impulse bezeichnet. Wie (196c) lehrt, ergeben sie die magnetischen Induktionsflüsse der beiden Stromringe.

Da die zyklischen Parameter in den Ausdruck von T nicht eingehen, so gilt

$$(196d)\quad \frac{\partial T}{\partial p_1} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial p_2} = 0,$$

und die Lagrangeschen Gleichungen (196) ergeben, mit Rücksicht auf (196c):

$$(196e)\quad P_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}, \qquad P_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}.$$

Dies sind die Kräfte, die auf Vermehrung von p_1 und p_2 hinwirken, d. h. die induzierten elektromotorischen Integralkräfte, gemessen im elektromagnetischen Maße. Wie wir sehen, ergeben sich aus den Lagrangeschen Gleichungen diese Kräfte, in Übereinstimmung mit dem Induktionsgesetz, gleich der zeitlichen Abnahme der umschlungenen Induktionsflüsse.

Bisher wurden die Lagrangeschen Gleichungen nur auf die zyklischen Parameter angewandt. Wir wollen jetzt die Gleichungen aufstellen, die denjenigen Parametern entsprechen, welche die Lage der Stromkreise bestimmen. Wir wollen sie mit $p_3, p_4 \ldots$ bezeichnen und die zugehörigen verallgemeinerten Kraftkomponenten mit $P_3, P_4 \ldots$. Dieses sind die bewegenden Kräfte, welche zwischen den Stromringen wirksam sind.

Halten wir die Leiter fest und die Stromintensitäten konstant, so fallen alle Ableitungen nach der Zeit fort, und die Lagrangeschen Gleichungen (196) ergeben für die durch die zyklischen Bewegungen bedingten mechanischen Kräfte

$$(196f)\quad P_3 = \frac{\partial T}{\partial p_3}, \qquad P_4 = \frac{\partial T}{\partial p_4}, \text{ usf.}$$

Man erhält für die Arbeit, welche diese Kräfte bei einer virtuellen Verrückung der Leiter bzw. ihrer Teile leisten:

$$(196\text{g}) \qquad \delta A = \frac{\partial T}{\partial p_3}\,\delta p_3 + \frac{\partial T}{\partial p_4}\,\delta p_4 + \dots = \delta T.$$

Es ist zu beachten, daß hier die partiellen Differentialquotienten nach p_3, p_4 bei konstant gehaltenen zyklischen Geschwindigkeiten q_1, q_2 zu nehmen sind. Daraus folgt: Die virtuelle Arbeit der elektrodynamischen Kräfte ist gleich der Zunahme, welche die elektrokinetische Energie erfährt, wenn die Verrückung bei konstant gehaltenen Stromintensitäten ausgeführt wird. Dieses Ergebnis stimmt nun ganz mit dem am Schlusse des vorigen Paragraphen erhaltenen überein. Auch die bewegenden Kräfte des Systemes ergeben sich aus dem mechanischen Bilde des Bizykels.

Maxwells Feststellung, daß die Gesetze der Elektrodynamik sich aus den allgemeinen Gleichungen der Mechanik ableiten lassen, ist von großer Bedeutung für die theoretische Physik geworden. Einmal hat diese Einsicht auf die Mechanik insofern zurückgewirkt, als man unter Beseitigung der Fernkräfte der Mechanik eine Form zu geben suchte, welche geeignet war, die im elektromagnetischen Felde wirkenden Kräfte zu umfassen. Diese Richtung, die in der Hertzschen Mechanik gipfelt, hält an der Vorstellung fest, daß alle physikalischen Vorgänge schließlich auf Bewegungen träger Massen zurückzuführen sind. Sie muß, wo die Bewegung der sichtbaren Massen die Erscheinungen nicht erklärt, verborgene Massen zu Hilfe nehmen, die in Bewegung begriffen sind. Der ganze Raum muß als von solchen Massen erfüllt betrachtet werden. Dieselben sind miteinander gekoppelt und übertragen so die Bewegung von einem Körper auf den anderen; die Hertzsche Mechanik fordert die Zurückführung aller Fernkräfte auf solche Mechanismen verborgener Massen.

Die Vorstellung eines Mechanismus in dem von wägbarer Materie leeren Raume hat manches Gekünstelte. Aber auch derjenige, der sie nicht annimmt, muß die Wichtigkeit der Entdeckung anerkennen, daß die Bewegungen der Körper und die elektrodynamischen Vorgänge denselben Gesetzen unterworfen sind.

Man braucht allerdings diese enge Beziehung der Mechanik zur Elektrodynamik nicht unbedingt zugunsten der mechanischen Naturanschauung zu deuten. Man kann in ihr mit demselben Rechte einen Hinweis darauf sehen, daß die Bewegungen der Körper den Gesetzen der Elektrodynamik unterworfen sind. Dieser Auffassung neigt in der Tat die heutige Physik zu; sie sucht die Mechanik und überhaupt die ganze Physik den Gesetzen des elektromagnetischen Feldes anzupassen.

§ 66. Ein Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion.

Wir betrachten einen einzelnen geschlossenen Stromring. In demselben mögen gewisse eingeprägte Kräfte wirken, welche durch die chemische und thermische Beschaffenheit der zum Stromring zusammengefügten Leiter bedingt sind. Zu diesen Kräften können noch solche elektromotorische Kräfte treten, die von Stromschwankungen in anderen Stromkreisen oder von irgendwelchen sonstigen Änderungen des umschlungenen magnetischen Induktionsflusses herrühren. Diese Kräfte wollen wir hier zu den eingeprägten rechnen, indem wir die induktive Rückwirkung unseres Stromringes auf die übrigen Leiter außer Betracht lassen. Das Linienintegral aller der eingeprägten Kräfte bezeichnen wir mit E. Die Summe dieser elektromotorischen Kraft und der elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion muß dann dem Produkte aus Widerstand und Stromstärke gleich sein:

$$E - \frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt} = RJ. \tag{197}$$

Bringen wir die Stromstärke J, die als Unbekannte zu gelten hat, auf die linke Seite, so wird die Differentialgleichung erhalten

$$\frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt} + RJ = E. \tag{197a}$$

Deren Integration ergibt bei gegebener elektromotorischer Kraft die zeitliche Änderung der Stromintensität J.

A. E konstant. In diesem Falle erhält man, da auch L und R Konstanten sind, als Lösung der Differentialgleichung (197 a)

(198) $$J = \frac{E}{R} - Ce^{-\frac{c^2 R}{L} t}.$$

Die Integrationskonstante C bestimmt sich aus den Anfangsbedingungen. Wird der Strom zur Zeit $t = 0$ geschlossen und von nun an der Einwirkung einer konstanten, eingeprägten elektromotorischen Kraft unterworfen, so ist

$$C = \frac{E}{R}$$

zu setzen, damit J für $t = 0$ verschwindet. Wir haben dann

(198a) $$J = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\vartheta}}\right),$$

wobei abkürzungsweise

(198b) $$\vartheta = \frac{L}{c^2 R}$$ gesetzt ist.

Die Konstante ϑ hat die Dimension einer Zeit. Sie wird als Zeitkonstante des Stromkreises bezeichnet. Von ihr hängt das zeitliche Anschwellen der Stromstärke nach dem Stromschlusse ab. Dasselbe erfolgt um so langsamer, je größer die Selbstinduktion im Verhältnis zum Widerstande ist.

B. E periodisch. Wir nehmen die äußere elektromotorische Kraft als periodisch an, etwa nach dem Gesetze

$$E = a \sin(\nu t)$$

schwingend; a stellt hier die Amplitüde, ν die Frequenz (Schwingungszahl in 2π Sekunden) dar. Uns interessiert nur der Wechselstrom J von der Frequenz ν, der sich unter der Einwirkung dieser periodischen elektromotorischen Kraft herstellt. Demgemäß suchen wir (197a) durch den Ansatz zu genügen

(199) $$J = b \sin(\nu t + \beta) = b\,\{\sin \nu t \cos \beta + \cos \nu t \sin \beta\}.$$

Es wird dann

$$\frac{dJ}{dt} = b\nu \cos(\nu t + \beta) = b\nu\,\{\cos \nu t \cos \beta - \sin \nu t \sin \beta\}.$$

Soll (197a) für alle t erfüllt sein, so haben die Konstanten b, β den Gleichungen zu genügen

(199a) $$\begin{aligned} \frac{L}{c^2} b\nu \cos \beta + Rb \sin \beta &= 0, \\ -\frac{L}{c^2} b\nu \sin \beta + Rb \cos \beta &= a. \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man

$$\text{(199b)} \qquad \operatorname{tg} \beta = -\frac{\nu L}{c^2 R}$$

und aus der ersten und zweiten zusammen

$$\text{(199c)} \qquad b = \frac{a}{R} \cos \beta = \frac{a}{\sqrt{R^2 + \frac{\nu^2 L^2}{c^4}}}$$

Die Gleichung (199b) zeigt an, daß der durch (199) bestimmte Strom J der Phase nach hinter der erregenden elektromotorischen Kraft zurückbleibt. Die Gleichung (199c) bestimmt das Verhältnis $b:a$ der Amplitüden von Strom und elektromotorischer Kraft. Dasselbe wird nicht, wie bei Gleichstrom, durch den reziproken Widerstand R gegeben, sondern durch das Reziproke des Ausdruckes

$$\text{(199d)} \qquad R' = \sqrt{R^2 + \frac{\nu^2 L^2}{c^4}},$$

der stets größer als R ist und der „scheinbarer Widerstand“ oder auch „Impedanz“ genannt wird.

Wir wollen die Differentialgleichung (197a) noch auf die Probespule anwenden, die wir in § 54 zur Ermittelung des Vektors $\mathfrak{B}$ verwandt haben. Die bei der zeitlichen Änderung des magnetischen Feldes induzierte elektromotorische Kraft ist nach dem Induktionsgesetz gleich

$$-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n df.$$

Nun sollte die Probespule so klein gewählt werden, daß das magnetische Feld auf f gleichförmig ist; daher ist der Induktionsfluß gleich $\Phi = \mathfrak{B}_n f$

zu setzen; demnach wird die elektromotorische Kraft

$$E = -\frac{1}{c} f \frac{d\mathfrak{B}_n}{dt}.$$

Ferner war in § 54 von einem Felde die Rede, welches vom unmagnetischen Anfangszustande (für $t = 0$) aus erregt und dann konstant gehalten wird; für ein solches wird

$$\int_0^\infty E\,dt = -\frac{1}{c} f \mathfrak{B}_n,$$

und so ergibt Gleichung (197a)

$$\frac{L}{c^2}\int_0^\infty \frac{dJ}{dt}\,dt + R\int_0^\infty J\,dt = -\frac{1}{c} f \mathfrak{B}_n.$$

Da der induzierte Strom schließlich wieder erlischt, so ist

$$\int_0^\infty \frac{dJ}{dt}\,dt = 0;$$

es fällt also das erste Glied fort. Ferner ist

$$\int_0^\infty J\,dt = e$$

die Elektrizitätsmenge, die im ganzen den Querschnitt durchströmt hat. Es wird daher

$$Re = -\frac{1}{c} f \mathfrak{B}_n,$$

d. h. es hängt e nicht von der Selbstinduktion, sondern nur von dem Widerstande der Spule und dem schließlich umschlungenen Induktionsflusse ab. Wir durften daher in § 54, ohne von der Selbstinduktion der Spule zu reden, den Vektor $\mathfrak{B}$ durch die Gleichung (163)

$$-\mathfrak{B}_n = c \cdot \frac{Re}{f}$$

bestimmen. Die Ermittelung des Vektors $\mathfrak{B}$ durch die Probespule rechtfertigt sich also durch die uns nunmehr genauer bekannten Gesetze der Elektrodynamik.

Derselbe Gedankengang, angewandt auf einen beliebigen Drahtring, führt übrigens zur Gleichung (164), die in § 54 ohne Beweis geblieben ist.

Wir haben hier nur von der magnetischen Energie des Stromes gesprochen, nicht von seiner elektrischen Energie. Und doch wird im allgemeinen auch der stationäre Strom von einem elektrischen Felde umgeben sein.

Denken wir uns nämlich den Kreisstrom durch eine eingeprägte Kraft unterhalten, die an einer bestimmten Stelle in die Strombahn eingeschaltet ist (etwa ein galvanisches Element), so entstehen freie elektrische Ladungen und in deren Folge ein elektrostatisches Feld; denn nur dadurch, daß ein tangentielles Potentialgefälle längs der Leitung besteht, wird der Strom in den homogenen Teilen der Leitung aufrechterhalten. Dem elektrostatischen Felde aber entspricht eine elektrische Energie.

Die elektrostatische Energie eines geschlossenen Leitungsstromes ist aber meist nur gering im Vergleiche mit der magnetischen Energie, die man deshalb gewöhnlich allein als Stromenergie bezeichnet. Insbesondere für dünne Leitungsdrähte ist der elektrische Anteil der Energie zu vernachlässigen. Wir können uns in dieser Hinsicht auf das Ergebnis des § 31 berufen, wonach die Kapazität eines stabförmigen Leiters mit abnehmender Dicke kleiner und kleiner wird. Demnach wird bei gegebener Spannungsverteilung längs der Leitung mit abnehmender Dicke die Ladung immer geringer. Da nun die elektrische Energie eines elektrostatischen Feldes sich durch die Produkte der Ladungen und Spannungen ausdrückt, so wird mit abnehmendem Querschnitte der Leitung die elektrische Energie immer geringer. Die magnetische Energie aber verhält sich gerade umgekehrt. Bei gegebenem Strome ist die Feldstärke in der unmittelbaren Umgebung des Drahtes dem Abstand von der Drahtachse umgekehrt proportional, die magnetische Energiedichte also dem Quadrate derselben, die magnetische Energie wird daher logarithmisch unendlich, wenn der Querschnittsradius gleich Null wird. Aus diesem Grunde durften wir auch bei der Berechnung der Selbstinduktion nicht den Leiter als linearen Leiter ansehen; die Selbstinduktion eines solchen würde unendlich sein. Da nun mit abnehmendem Querschnitt der Leitung die magnetische Energie des Stromes immer größer, die elektrische immer kleiner wird, so wird die letztere schließlich gegen die erstere zu vernachlässigen sein.

Neben dem Querschnitt kommt allerdings noch die Leitfähigkeit des Materials in Frage. Wird die Strombahn von einem schlechten Leiter gebildet, so wird die elektrische Energie be-

trächtlich. Denn hier bedürfen wir weit größerer elektrischer Kräfte als bei einem guten Leiter, um einen Strom von bestimmter Stärke, also auch ein magnetisches Feld von gegebener Energie, aufrechtzuerhalten. Die elektrische Energie wächst daher, bei gegebener magnetischer Energie, umgekehrt proportional dem Quadrate der Leitfähigkeit.

Von solchen Fällen sehen wir hier ab und verstehen, wie üblich, unter der Energie eines geschlossenen Stromes ausschließlich die Energie des von ihm erzeugten magnetischen Feldes. Man kann übrigens die elektrostatische Energie ganz ausschließen wenn man die den Strom unterhaltenden eingeprägten Kräfte nicht auf eine kurze Strecke zusammengedrängt, sondern in passender Weise längs der Strombahn verteilt annimmt; durch geeignete Verteilung der eingeprägten elektrischen Kräfte kann man in der Tat erreichen, daß kein elektrisches Feld in der Umgebung des Drahtes entsteht.

§ 67. Ein Stromkreis mit Selbstinduktion, Kapazität und Widerstand. Elektrische Eigenschwingungen.

Bisher haben wir in diesem Kapitel nur von Strömen gesprochen, die in geschlossenen Bahnen fließen. Jetzt betrachten wir einen Leitungsdraht, dessen Enden in die sich gegenüberstehenden Platten eines Kondensators einmünden. Bei dieser Anordnung wird, wie wir wissen, der Leitungsstrom durch den die Kondensatorplatten verbindenden Verschiebungsstrom zu einer geschlossenen Strömung ergänzt. Ist indessen die dielektrische Schicht hinreichend dünn, so kann für die Berechnung des magnetischen Feldes und der magnetischen Energie die Anordnung als einem geschlossenen Stromkreise gleichwertig betrachtet werden, indem der Verschiebungsstrom in der dünnen dielektrischen Schicht durch ein kurzes, vom Leitungsstrom durchflossenes Drahtstück ersetzt gedacht wird.

Die Einschaltung des Kondensators bringt nun aber insofern eine wesentlich neue Problemstellung mit sich, als seine Kapazität und seine elektrische Energie zu berücksichtigen sind. In der Tat geht z. B. aus der für die Kapazität K des Kugelkondensators

abgeleiteten Formel (122) hervor, daß die Kapazität gerade für geringen Abstand der Kondensatorbelegungen beträchtlich wird. Und aus der Formel (138d) folgt, daß die elektrische Energie des Kondensators

$$U = \frac{1}{2} K\varphi^2$$

ist, wenn φ jetzt für die Potentialdifferenz der Kondensatorbelegungen geschrieben wird. Da andererseits die magnetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\frac{L}{c^2} J^2$$

ist, so beträgt die jeweilige Energie des Systemes

$$W = U + T = \frac{1}{2} K\varphi^2 + \frac{1}{2}\frac{L}{c^2} J^2. \tag{200}$$

Äußere elektromotorische Kräfte sollen nicht wirksam sein. Alsdann muß die Joulesche Wärmeentwickelung der Energieabnahme des Systemes gleich sein:

$$RJ^2 = -\frac{dW}{dt} = -K\varphi\frac{d\varphi}{dt} - \frac{L}{c^2} J \frac{dJ}{dt}.$$

Da nun der Strom der einen Kondensatorbelegung Elektrizität entzieht und der anderen die gleiche Menge zuführt, so hat man

$$J = -\frac{de}{dt} = -K\frac{d\varphi}{dt}; \tag{200a}$$

dabei ist Leitungsstrom und Potentialgefälle längs des Drahtes in demselben Sinne gerechnet.

Wir erhalten jetzt

$$RJ = \varphi - \frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt}, \tag{200b}$$

eine Gleichung, die wir auch aus Gleichung (197) des vorigen Paragraphen gewonnen hätten, wenn wir dort für E die Potentialdifferenz der Kondensatorbelegungen setzten.

Aus (200a, b) folgt

$$\varphi + RK\frac{d\varphi}{dt} + \frac{LK}{c^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0. \tag{200c}$$

Diese Differentialgleichung bestimmt den zeitlichen Verlauf der Potentialdifferenz der Kondensatorplatten.

Nach (200a) ist dieselbe Differentialgleichung

$$J + RK\frac{dJ}{dt} + \frac{LK}{c^2}\frac{d^2J}{dt^2} = 0 \tag{200d}$$

für den zeitlichen Verlauf des Stromes maßgebend.

Die Gleichungen sind beide von der Form

(201) $$y'' + 2\delta y' + (\nu^2 + \delta^2)y = 0,$$

wenn abkürzungsweise gesetzt wird

(201a) $$\delta = \frac{1}{2}\frac{Rc^2}{L} \quad \text{und} \quad \nu^2 = \frac{c^2}{LK} - \frac{1}{4}\frac{R^2c^4}{L^2}.$$ (201b)

Das vollständige Integral der Differentialgleichung (201) ist

(201c) $$y = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t},$$

worin c_1, c_2 Integrationskonstanten, k_1 und k_2 aber die Wurzeln der quadratischen Gleichung

(201d) $$k^2 + 2\delta k + \nu^2 + \delta^2 = 0$$ sind.

Wir erhalten zwei wesentlich verschiedene Arten der Entladung des Kondensators, je nachdem ν^2 negativ oder positiv ist.

Ist $$R > \frac{2}{c}\sqrt{\frac{L}{K}}, \quad \nu^2 < 0,$$

so sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung (201d)

(201e) $$k_1 = -\delta + \nu i, \qquad k_2 = -\delta - \nu i$$ reell.

Die Lösung (201c) ergibt in diesem Falle eine aperiodische Entladung. Je mehr wir aber den Widerstand R verkleinern, oder L vergrößern und K verkleinern, desto mehr nähern wir uns dem Falle, wo

$$R < \frac{2}{c}\sqrt{\frac{L}{K}}, \quad \nu^2 > 0$$ ist.

In diesem Falle findet eine oszillatorische Entladung statt. Durch Umformung der Lösung (201c) und indem wir die Integrationskonstanten durch andere ersetzen, erhalten wir

(201f) $$y = ae^{-\delta t}\sin(\nu t + \alpha).$$

Hier kann y sowohl Strom J wie Potentialdifferenz φ bedeuten. Die Integrationskonstanten a und α sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen.

Das hier behandelte Problem geht übrigens in das im vorigen Paragraphen behandelte über, wenn man $K = \infty$ setzt. Dann wird

$$\nu = \delta i,$$ daher

$$k_1 = -2\delta = -\frac{Rc^2}{L}, \quad k_2 = 0.$$

Die Gleichung (201c) ergibt dann

$$y = c_1 e^{-\frac{c^2 R}{L} t} + c_2,$$

einen Ausdruck, der das vollständige Integral der Differentialgleichung (197a) des geschlossenen Kreisstromes darstellt, für den Fall, daß die eingeprägte Kraft E gleich Null ist. Ein Stromkreis, in den ein Kondensator von unendlich großer Kapazität eingeschaltet ist, verhält sich demnach wie ein geschlossener Stromkreis.

Ein anderer Grenzfall wird erhalten, wenn der Widerstand $R = 0$ gesetzt wird. Dann wird $\delta = 0$, mithin geht (201f) über in

(201g) $$y = a \sin(\nu t + \alpha).$$

Die Schwingung ist dann eine rein periodische. Die Schwingungsfrequenz ν (Schwingungszahl in 2π Sekunden) wird in diesem Falle nach (201b)

(201h) $$\nu = \frac{c}{\sqrt{LK}}.$$

Bezeichnet τ die Dauer einer ganzen Schwingung, so ist

(201i) $$\tau = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{c}\sqrt{LK}.$$

Die theoretische Möglichkeit oszillatorischer Flaschenentladungen wurde zuerst von W. Thomson erkannt. Nach ihm wird die Formel (201i) für die Schwingungsdauer die „Thomsonsche Formel“ genannt. Daß die rechte Seite in der Tat die Dimension einer Zeit hat, davon überzeugt man sich an der Hand der Dimensionstafel des § 61. Die Wellenlänge der elektrischen Wellen von der Schwingungsdauer τ im Äther wird gegeben durch

(201k) $$\lambda = c\tau = 2\pi\sqrt{LK}.$$

Kommt der Leitungswiderstand R in Betracht, so ist die Entladung nicht mehr streng periodisch, sondern sie erfährt eine Dämpfung, die sich in (201f) durch den Exponentialfaktor kundgibt; dabei wird die elektromagnetische Energie des Kreises allmählich in Joulesche Wärme verwandelt. Für die Schwingungsfrequenz gilt jetzt die Formel (201k) nicht mehr genau,

sondern sie ist durch die genauere Formel (201 b) zu ersetzen. Auch die Thomsonsche Formel ist entsprechend zu berichtigen, doch kommt die Abweichung nicht in Betracht, falls R^2 klein gegen $\frac{4L}{c^2 K}$ ist.

Wir wollen die Formeln auf ein Beispiel anwenden, wobei wir uns des Gaußschen Maßsystemes (§ 61) bedienen. Die Kapazität K können wir für einen Kugelkondensator nach Gleichung (126) berechnen. Hat man z. B.

$$\varepsilon = 5, \quad a = 10 \text{ cm}, \quad b = 10{,}2 \text{ cm}, \qquad \text{so folgt}$$

$$K = 2550 \text{ cm}.$$

Wir denken uns eine Leydener Flasche von dieser Kapazität durch einen einfachen Schließungsbogen entladen; es mag etwa

$$L = 10^7 \text{ cm}$$

sein. Der Widerstand sei gleich 1 Ohm, daher in absolutem elektrostatischen Maße $\quad R = \frac{1}{9}\, 10^{-11}.$

Diese Zahl ist hier für R zu setzen, da das Gaußsche System den Widerstand elektrostatisch mißt. Demgemäß wird

$$R^2 = \frac{1}{81} \cdot 10^{-22}, \qquad \frac{4L}{c^2 K} = \frac{4 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^{20} \cdot 2550} = \frac{16}{9} \cdot 10^{-17} \text{ zirka.}$$

Der Quotient
$$R^2 : \frac{4L}{c^2 K}$$
ist demnach etwa gleich 10^{-7}.

Der Widerstand beeinflußt also die Frequenz der Schwingungen nur sehr wenig, und man darf mit der Thomsonschen Formel rechnen. Dieselbe ergibt gemäß (201 i, k)

$$\lambda = 2\pi \sqrt{2250 \cdot 10^7} = 10^6 \text{ cm} \qquad \text{und}$$

$$\tau = \frac{1}{3} \cdot 10^{-4} \text{ sec.}$$

Die Dämpfungskonstante δ endlich wird nach (201 a)

$$\delta = 50,$$

d. h. der Exponentialfaktor in (201 f), der die Dämpfung der Schwingungen ausdrückt, nimmt unter den angenommenen Verhältnissen erst nach 0,02 Sekunden den Wert

$$e^{-1} = \frac{1}{2{,}718}$$

an. Während dieser Zeit erfolgen aber 600 Schwingungen, so daß in der Tat für eine kleine Anzahl aufeinanderfolgender Schwingungen die Abnahme der Amplitüde kaum merklich ist. Der durch (201g) dargestellte Fall der ungedämpften Schwingung hat daher als Grenzfall, der sich oft in großer Annäherung mit dem wahren Vorgange deckt, eine nicht zu unterschätzende Bedeutung.

Wir wollen diesen Grenzfall noch etwas eingehender erörtern. Setzen wir

$$J = a \sin(\nu t), \tag{202}$$

so folgt aus Gleichung (200b), die hier in

$$\varphi = \frac{L dJ}{c^2 dt} \text{ übergeht,} \quad \varphi = \frac{L}{c^2} a \nu \cos(\nu t),$$

oder nach (201h)

$$\varphi = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{L}{K}} \cos(\nu t). \tag{202a}$$

Diese Form der Lösung ist bereits den Anfangsbedingungen angepaßt, die man zu stellen hat, falls die Belegungen des geladenen Kondensators zur Zeit $t = 0$ in leitende Verbindung gebracht werden; diese plötzliche Herstellung der leitenden Verbindung wird in der Tat durch den elektrischen Funken verwirklicht. Zur Zeit $t = 0$ fließt noch kein Strom. Demgemäß ist die magnetische Energie Null; es ist die Energie nur in elektrischer Form vorhanden. Sie beträgt

$$W = U = \frac{1}{2} K\varphi^2 = \frac{1}{2} \frac{a^2 L}{c^2}. \tag{202b}$$

Nun beginnt der Strom zu fließen; die elektrische Energie wird im Verlaufe einer Viertelschwingung in magnetische Energie verwandelt; zu dieser Zeit ist

$$U = 0, \quad W = T = \frac{1}{2} \frac{a^2 L}{c^2}. \tag{202c}$$

Im Verlaufe der nächsten Viertelschwingung kehrt die Energie wieder zwischen die Kondensatorplatten zurück, und dann beginnt das Spiel von neuem, indem die Energie bald vom Kondensator

in das den Leitungsdraht umgebende Magnetfeld, bald wieder zurückströmt; dabei ist im Mittel die magnetische Energie der elektrischen gleich.

Die anfängliche Potentialdifferenz φ_0 hängt von der Schlagweite der Funkenstrecke ab; die Stromamplitüde a bestimmt sich hieraus; es ist nach (202a)

$$\varphi_0 = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{L}{K}}, \qquad \text{daher}$$

$$a = \varphi_0 c \sqrt{\frac{K}{L}}. \tag{202d}$$

Die Stromamplitüde ist daher um so größer, je größer die Kapazität des Kondensators und je kleiner die Selbstinduktion des Schließungsbogens ist.

Die Wellenlänge des vorhin durchgerechneten Zahlenbeispiels betrug 10 Kilometer; dies entspricht der Größenordnung nach den von Feddersen beobachteten Schwingungen. Hier ist die Annahme quasistationärer Strömung durchaus zulässig. Denn die Dimensionen des Flaschenkreises sind klein gegen die Wellenlänge; für die Berechnung der Selbstinduktion einerseits kommt die kurze, vom Verschiebungsstrom eingenommene Strecke des Kreises nicht in Betracht, und andererseits ist die Kapazität des Leitungsdrahtes sehr gering gegen die Flaschenkapazität. Demgemäß ist die obige mit den Begriffen der Potentialtheorie operierende Betrachtung hier angemessen. Wir konnten das Problem so behandeln, als ob das elektrische Feld augenblicklich der Ladung der Kondensatorbelegungen, das magnetische dem im Schließungskreise zirkulierenden Strome entspräche. Daher reichen diejenigen mathematischen Methoden aus, welche zunächst nur für die Elektrostatik bzw. die stationäre elektrische Strömung entwickelt worden sind. Gerade dasjenige, was die Maxwellsche Theorie von der Fernwirkungstheorie unterscheidet, kommt bei diesen Schwingungen noch nicht zur Geltung. Für die experimentelle Prüfung der Maxwellschen Theorie war daher die Erzeugung schnellerer elektrischer Schwingungen notwendig.

Es war Heinrich Hertz, der zuerst lehrte, elektrische Wellen von wesentlich kürzerer, im Laboratorium meßbarer Wellenlänge

zu erregen und zu beobachten, und der so die Grundlage für die experimentelle Prüfung der Maxwellschen Theorie schuf. Aus der Thomsonschen Formel folgt, daß man theoretisch die Wellenlänge verkleinern kann, indem man Kapazität des Kondensators und Selbstinduktion des Schließungsbogens möglichst klein wählt. Man wird also den Abstand der Kondensatorplatten möglichst vergrößern und, an Stelle eines mehrfach gewundenen, einen möglichst gestreckten Draht setzen. Tut man dies, so gelangt man schließlich zu derjenigen Erregerform, die von Hertz bei seinen ersten Versuchen verwandt wurde. Der Hertzsche Erreger besteht aus zwei Kugeln, die durch einen geradlinigen, in der Mitte durch die Funkenstrecke unterbrochenen Draht verbunden sind. Die Wellenlänge der von diesem Erreger entsandten Wellen betrug nur wenige Meter. Es ist sehr bemerkenswert und war theoretisch nicht vorauszusehen, daß der elektrische Funke die Eigenschaft besitzt, in einer gegen die Schwingungsdauer dieser schnellen Schwingungen kurzen Zeit den die Funkenbahn ausfüllenden Isolator leitend zu machen und seinen Widerstand so zu erniedrigen, daß wirklich oszillatorische, nicht aperiodische Entladungen eintreten.

Bei diesen Hertzschen Schwingungen ist es nun nicht mehr gestattet, den Strom als quasistationär anzusehen. In der Tat, der Leitungsstrom ist hier auch nicht näherungsweise geschlossen, der Verschiebungsstrom, der die eine Kugel des Erregers mit der anderen durch den Isolator hindurch verbindet, kommt hier wesentlich in Betracht. Auch ist die Länge der offenen Bahn des Leitungsstromes hier durchaus nicht mehr klein gegen die Wellenlänge, sondern nur ein wenig kleiner als eine halbe Wellenlänge. Man muß daher die zeitliche Ausbreitung des Feldes berücksichtigen, d. h. die Differentialgleichungen des Feldes integrieren, wenn man die hier stattfindenden Schwingungsvorgänge mathematisch behandeln will. Das wird insbesondere dann notwendig, wenn man zu noch kürzeren Wellen übergeht. Hertz selbst gelangte in seinen Hohlspiegelversuchen zu einer Wellenlänge von 60 cm herab, spätere Experimentatoren haben elektrische Wellen von nur wenigen Millimetern Wellenlänge beobachtet.

Bei der praktischen Verwendung der schnellen Schwingungen in der drahtlosen Telegraphie hat man es mit Wellen von 100 bis 15000 Metern Wellenlänge zu tun. Die Sendedrähte oder Antennen, die man dabei verwendet, sind ihrerseits oft von derselben Größenordnung wie die Wellenlänge; auch hier darf man demnach nicht ohne weiteres die Annahme quasistationärer Strömung zugrunde legen.

Diese Annahme erweist sich insbesondere insofern als unzureichend, als sie die vom Erreger ausgesandten Wellen nicht enthält. Diese Wellen führen Energie mit sich, und je weiter bei dem Fortgange der Schwingungen die Wellenzüge sich im Raume ausbreiten, desto mehr muß der Energieinhalt des Wellenerregers aufgezehrt werden. Auf diese Energiestrahlung nimmt die Theorie der quasistationären Strömung keine Rücksicht. Sie führt die Dämpfung ausschließlich auf die Joulesche Wärme zurück, während in Wirklichkeit auch bei verschwindendem Widerstande die Erregerschwingungen eine Dämpfung durch Strahlung erfahren. Auch sind es gerade die von dem Sendedrahte ausgesandten Wellen, die in der drahtlosen Telegraphie wirksam werden. (Vgl. § 79, 80.)

Drittes Kapitel.

Elektromagnetische Wellen.

§ 68. Ebene Wellen in einem isotropen, homogenen Dielektrikum.

Wir gehen in diesem Kapitel zur Behandlung solcher elektromagnetischer Felder über, die zeitlich und räumlich rasch wechseln, insbesondere der elektromagnetischen Wellen. Bei diesen wird die Annahme quasistationären Stromes unzulässig. Man hat der mathematischen Theorie der elektrischen Wellen die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes für ruhende Körper (§ 60) zugrunde zu legen.

Wir betrachten zunächst ein homogenes, isotropes Dielektri-

kum; ein solches ist von eingeprägten Kräften frei. Die Feldgleichungen (180) ergeben hier

(203a) $\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{curl}\,\mathfrak{H}$, $-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{curl}\,\mathfrak{E}$. (203b)

Da μ konstant ist und wahrer Magnetismus nicht vorhanden ist, so wird

(203c) $$\text{div}\,\mathfrak{H} = 0.$$

Dazu kommt, wenn wir wahre Ladungen im Innern des Isolators ausschließen,

(203d) $$\text{div}\,\mathfrak{E} = 0.$$

Durch dieses Gleichungssystem bestimmt sich die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in dem Dielektrikum.

Wir können aus dem Gleichungssystem leicht einen der beiden Vektoren $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{H}$ fortschaffen. Man eliminiert $\mathfrak{E}$, indem man von der ersten Gleichung den Curl nimmt, die zweite nach t ableitet und, mit dem Faktor ε/c multipliziert, zur ersten addiert. Dann folgt $$-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} = \text{curl curl}\,\mathfrak{H}.$$

Nach der Rechnungsregel (95) geht diese Gleichung mit Rücksicht auf (203c) über in

(203e) $$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathfrak{H}.$$

Andererseits kann man auch $\mathfrak{H}$ eliminieren, indem man (203a) mit μ/c multipliziert und nach t ableitet, hierauf von (203b) den Curl nimmt und diese Gleichung sodann von der ersten abzieht. Man erhält dann

(203f) $$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathfrak{E}.$$

Die beiden Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ erfüllen demnach dieselbe Differentialgleichung. Für zeitlich nicht wechselnde Felder geht diese in die Laplacesche Differentialgleichung über.

Wir suchen jetzt partikuläre Lösungen der Feldgleichungen, die ebenen, homogenen Wellenzügen entsprechen. Man bezeichnet einen Wellenzug als homogen, wenn man im Felde eine Schar paralleler Ebenen so legen kann, daß die elektrische und die

magnetische Feldstärke längs einer jeden dieser Ebenen sich nach Betrag und Richtung nicht verändern; jene Ebenen nennt man die Wellenebenen, ihre Normalenrichtung die Wellennormale. Wir wollen die x-Achse in die Wellennormale legen, so daß die Wellenebenen der (yz)-Ebene parallel werden. Da längs der Wellenebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ konstant sein sollen, so fallen die partiellen Ableitungen nach y und z fort, und es lauten die Feldgleichungen:

$$\text{(204a)} \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = 0\,, & -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = 0\,, \\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}\,, & -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}\,, \\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = +\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}\,, & -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = +\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}\,. \end{cases}$$

$$\text{(204b)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} = 0\,.$$

Aus (204b) folgt, daß die longitudinalen, d. h. die parallel der Wellennormale genommenen Komponenten der Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ längs der Wellennormale sich nicht ändern. Die ersten beiden der Gleichungen (204a) aber besagen, daß diese Komponenten $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{H}_x$ auch von der Zeit nicht abhängen. Wir kennen also diese Größen für alle Zeiten und für alle Werte von x, wenn wir ihren Wert für irgendeine Zeit und für irgendeine Parallelebene zur (yz)-Ebene angeben. Wir wollen nun voraussetzen, daß zu Beginn des Vorganges es eine Parallelebene zur (yz)-Ebene gibt, die von den Wellen noch nicht erreicht ist. Hier wird sein

$$\text{(204c)} \qquad \mathfrak{E}_x = 0\,, \qquad \mathfrak{H}_x = 0\,.$$

Dann verschwinden die longitudinalen Komponenten der Feldstärken im ganzen Raume und zu jeder Zeit.

Würden wir $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{H}_x$ nicht gleich Null, sondern konstant annehmen, so würde ein konstantes elektrisches bzw. magnetisches Feld parallel der x-Achse sich dem Felde der Wellen überlagern; konstante Felder parallel der y-Achse oder der z-Achse können wir ebenfalls einer Lösung der Gleichungen (204a) stets hinzufügen, da diese linearen Differentialgleichungen durch Einsetzen

konstanter Werte von $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$ bzw. $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ erfüllt werden. Die Wellenfortpflanzung würde durch Hinzufügung eines solchen Feldes nicht geändert werden. Daher haben solche Felder hier kein Interesse. Sie rühren von elektrischen Ladungen oder Strömen her, die ihren Sitz außerhalb des betrachteten Feldes haben und die Wellen in dem hier betrachteten Falle nicht beeinflussen.

Wir bemerken, daß die vier letzten, noch zu erfüllenden Gleichungen (204a) die Komponenten $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_z$ einerseits und $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{H}_y$ andererseits miteinander verknüpfen. Wir können daher diese Paare von Komponenten getrennt behandeln. Die Gleichungen

$$\text{(204d)} \qquad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \qquad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = +\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}$$

ergeben nach Elimination von $\mathfrak{E}_y$ bzw. $\mathfrak{H}_z$

$$\text{(204e)} \qquad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2}, \qquad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x^2} \qquad \text{(204f)}$$

Gleichungen, die aus (203e, f) direkt folgen, wenn man, der Annahme homogener ebener Wellen entsprechend, die Ableitungen nach y und z streicht. Diese partiellen Differentialgleichungen sind aus der Theorie der schwingenden Saite bekannt. Die allgemeine Lösung von (204e) schreiben wir in der Form

$$\text{(205)} \qquad \mathfrak{E}_y = f(x-wt) + g(x+wt), \quad \text{wobei} \quad w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad \text{(205a)}$$

gesetzt wird.

Die Gleichungen (204d) werden dann erfüllt durch

$$\text{(205b)} \qquad \mathfrak{H}_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\{f(x-wt) - g(x+wt)\}.$$

Die willkürlichen Funktionen

$$f(x-wt) \quad \text{und} \quad g(x+wt)$$

stellen Wellen dar, die sich in Richtung der positiven bzw. der negativen x-Achse fortpflanzen.

Wir beschränken uns weiterhin auf die Besprechung derjenigen Partikulärlösung, welche durch die Funktion

$$f(x-wt)$$

gegeben ist. Die Form der Funktion f ist durch die Wellenkurve zur Zeit $t = 0$ bestimmt; diese Wellenkurve pflanzt sich unver-

zerrt mit der Geschwindigkeit w fort. Die Geschwindigkeit einer ebenen elektromagnetischen Welle in einem isotropen Isolator hängt also nicht von der Wellenform und Wellenlänge ab. Im leeren Raume, wo das Gaußsche Maßsystem

$$\varepsilon = 1 \quad \text{und} \quad \mu = 1$$

setzt, wird nach (205a) die Geschwindigkeit durch die universelle Konstante c gegeben, welche durch Vergleichung der elektrostatischen und der elektromagnetischen Einheiten gleich

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

gefunden ist. (Vgl. § 61.) Diese Zahl stimmt nun mit der Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume überein. Wir sehen also: im leeren Raume ist die Geschwindigkeit ebener elektromagnetischer Wellen der Lichtgeschwindigkeit c gleich.

Nicht nur die Geschwindigkeit ist den Lichtwellen und den elektromagnetischen Wellen gemeinsam. Die elektromagnetischen Wellen sind wie die Lichtwellen transversal. In der Tat fanden wir, daß weder $\mathfrak{E}$ noch $\mathfrak{H}$ eine periodisch wechselnde longitudinale Komponente besitzen kann. Beide Vektoren stehen senkrecht auf der Wellennormalen. Im leeren Raume zeigen demnach die elektromagnetischen Wellen und die Lichtwellen ein ganz entsprechendes Verhalten, wenn auch ihre Wellenlängen sehr verschieden sind.

Diese Folgerungen aus seinen Feldgleichungen waren es, die Maxwell zur Aufstellung der elektromagnetischen Lichttheorie führten. Die elektromagnetische Lichttheorie betrachtet die Lichtstrahlen und die Wärmestrahlen als elektromagnetische Wellen. Sie ist der alten mechanischen Theorie des Lichtes dadurch überlegen, daß sie den Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit aus rein elektrischen Messungen zu berechnen gestattet, und dadurch, daß sie von vornherein nur transversale ebene Lichtwellen zuläßt. Die alte Theorie, welche das Licht als Wellenbewegung eines elastischen Mediums betrachtete, konnte nur schwer das Fehlen longitudinalen Lichtes erklären. Die elek-

tromagnetische Lichttheorie schließt longitudinales Licht von vornherein aus.

In dielektrischen Körpern, deren Dielektrizitätskonstante bzw. magnetische Permeabilität von 1 verschieden ist, ist die Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen durch (205a) gegeben. Der Brechungsindex eines Dielektrikums ist demnach allgemein gleich

$$n = \frac{c}{w} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,. \tag{205c}$$

Für den Fall insbesondere, wo $\mu = 1$ ist, folgt die sogenannte „Maxwellsche Beziehung"

$$n^2 = \varepsilon\,. \tag{205d}$$

Für Isolatoren, die weder paramagnetisch noch diamagnetisch sind, muß nach der elektromagnetischen Lichttheorie die Dielektrizitätskonstante gleich dem Quadrate des optischen Brechungsindex sein. Die experimentelle Prüfung dieser Folgerung gestattet es, im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie zu beurteilen, ob die Feldgleichungen das dielektrische Verhalten der Körper diesen sehr schnellen elektrischen Schwingungen gegenüber richtig beschreiben. Es entstanden ja, wie im § 60 dargelegt wurde, die Feldgleichungen für Isolatoren dadurch aus den allgemeinen Hauptgleichungen des § 59, daß die Beziehung

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E}$$

von elektrostatischen auf beliebig rasch wechselnde Felder übertragen wurde. Die Gültigkeit der Maxwellschen Beziehung (205d) ist ein Prüfstein für die Richtigkeit dieser Annahme.

Für Gase, z. B. Wasserstoff, Kohlenoxyd, Luft, hat L. Boltzmann die Dielektrizitätskonstante ε gemessen und sie in guter Übereinstimmung mit dem Quadrate des optischen Brechungsindex gefunden. Andere Körper wiederum, wie z. B. das Wasser, gehorchen nicht der Maxwellschen Beziehung, indem die Dielektrizitätskonstante sich als weit größer ergibt als das Quadrat des optischen Brechungsindex. Diese Körper zeigen indessen bereits im Gebiete der Hertzschen Wellen Dispersion, d. h. Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Wellenlänge. Es kann daher

nicht wundernehmen, daß in solchen Körpern die Lichtwellen eine ganz andere Geschwindigkeit besitzen, als sich aus der elektrostatisch gemessenen Dielektrizitätskonstante ergibt. Dieser Umstand widerspricht nicht den Grundvorstellungen der elektromagnetischen Lichttheorie, da ja bereits für rein elektrische Wellen in solchen Körpern die Geschwindigkeit nicht durchweg der Maxwellschen Beziehung genügt. Man wird, um diese Abweichung von der Maxwellschen Beziehung zu erklären, das optische Verhalten dieser Isolatoren auf Grund der allgemeinen Hauptgleichungen behandeln, aber die Beziehung zwischen elektrischer Feldstärke $\mathfrak{E}$ und elektrischer Verschiebung $\mathfrak{D}$ erweitern; das geschieht in der Tat in den elektromagnetischen Theorien der Dispersion.

Indem wir aus dem Gleichungssystem (204a) diejenigen Gleichungen herausgriffen, welche $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_z$ miteinander verknüpfen, beschränkten wir die Betrachtung auf eine geradlinig polarisierte elektromagnetische Welle. In einer solchen folgen sich elektrischer Vektor, magnetischer Vektor und Richtung der Wellenfortpflanzung wie y-, z-, x-Achse eines rechtshändigen Achsensystems, d. h. wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand. In der Tat kehrt sich dieser Regel gemäß die Richtung von $\mathfrak{H}$ um, wenn die Fortpflanzungsrichtung umgekehrt, aber die Richtung von $\mathfrak{E}$ beibehalten wird; daher das negative Vorzeichen, mit dem

$$g(x + wt)$$

in Gleichung (205b) versehen ist. Die Gleichungen des Systems (204a), welche $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{H}_y$ miteinander verknüpfen, gehen aus den für $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_z$ geltenden hervor, indem $\mathfrak{E}_y$ durch $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{H}_z$ durch $-\mathfrak{H}_y$ ersetzt wird. Dieser Substitution entspricht eine Drehung um einen Rechten um die Wellennormale als Achse. Die Integration ergibt hier Wellen, die senkrecht zu den bisher behandelten polarisiert sind, die aber im übrigen dieselben Eigenschaften aufweisen wie jene.

Ob die Polarisationsebene eines geradlinig polarisierten Strahles durch den Vektor $\mathfrak{E}$ oder durch $\mathfrak{H}$ bestimmt wird, läßt sich auf Grund der bisherigen Entwicklungen nicht angeben. Doch

ergibt die Ausdehnung der elektromagnetischen Theorie auf Kristalle, daß man zu den Gesetzen der Kristalloptik gelangt, wenn man die optische Anisotropie auf die dielektrische zurückführt und die Polarisationsebene durch $\mathfrak{H}$ und die Wellennormale legt. Auch die Gesetze der Reflexion des Lichtes an der Oberfläche durchsichtiger Körper, auf die wir hier nicht eingehen wollen, ergeben sich aus der elektromagnetischen Theorie in Übereinstimmung mit den Formeln Fresnels, wenn man die Polarisationsebene eines geradlinig polarisierten Strahles senkrecht zum Vektor $\mathfrak{E}$ annimmt.

Wir wollen jetzt die Energie berechnen, welche eine ebene elektromagnetische Welle mit sich führt. Die in der Volumeinheit enthaltene Energie beträgt nach (180f)

$$\psi = \frac{1}{8\pi}\{\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2\}.$$

Da nun in einer parallel der x-Achse fortschreitenden Welle, wie sie durch den ersten Summanden in (205), (205b) dargestellt wird,

$$\varepsilon\mathfrak{E}^2 = \mu\mathfrak{H}^2 \tag{205e}$$

ist, so ist die Energie ebener Wellen in Isolatoren zur einen Hälfte elektrischer, zur anderen magnetischer Art. Während die Welle mit der durch (205a) bestimmten Geschwindigkeit w fortschreitet, tritt in der Sekunde durch den Quadratzentimeter einer zur Wellenebene parallelen Ebene die folgende Energiemenge hindurch:

$$\tag{205f} \left\{\begin{aligned} S = w\psi &= \frac{1}{8\pi}\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\{\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2\} \\ &= \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{E}^2 = \frac{c}{4\pi}\,|\mathfrak{E}|\cdot|\mathfrak{H}|. \end{aligned}\right.$$

Der so bestimmte Ausdruck S ist ein Maß der Energieströmung oder der Strahlung. Wir wollen, an den aus der Optik geläufigen Begriffen des Lichtstrahles uns anlehnend, S als Betrag eines Vektors deuten, dessen Richtung durch die Fortpflanzungsrichtung der ebenen Welle bestimmt ist. Da, wie wir wissen, die Fortpflanzungsrichtung mit der Richtung des äußeren Produktes der beiden aufeinander senkrechten Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$

übereinstimmt, so liegt es nahe, für den „Strahlvektor“ zu setzen

(205g) $$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E}\mathfrak{H}].$$

Dann wird die Strahlung nicht nur auf senkrecht zur Wellennormale gestellte, sondern auch auf schief gestellte Flächen durch die zur Fläche senkrecht genommene Komponente von $\mathfrak{S}$ angegeben, da sie dem Kosinus des Winkels proportional ist, welchen die Wellennormale mit der Flächennormale einschließt. Der erhaltene Ausdruck des Energiestromes durch die Feldstärken ergab sich hier für ebene Wellen unmittelbar aus dem für die Energiedichte angenommenen Werte. Er ist, wie wir später (in § 76) sehen werden, von allgemeiner Bedeutung.

§ 69. Ebene Wellen in Halbleitern.

Wenn der homogene isotrope Körper, in welchem sich die elektromagnetische Welle fortpflanzt, zugleich elektrisch leitet, so ist die Gleichung (203a) durch Einführung des Leitungsstromes zu erweitern. Die allgemeinen Feldgleichungen (180) ergeben hier

(206a) $$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sigma\mathfrak{E} = \operatorname{curl}\mathfrak{H},$$

(206b) $$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl}\mathfrak{E},$$

und aus dem Verschwinden des wahren Magnetismus folgt

(206c) $$\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0.$$

Die Gleichung (203d), welche das Verschwinden der freien Elektrizität im Innern des homogenen Mediums ausspricht, bleibt auch für die Wellen im Innern des homogenen Leiters gültig. Um dieses einzusehen, bilden wir die Divergenz von (206a). Wir erhalten dann $\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{E} + \frac{4\pi\sigma}{c}\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0.$

Aus dieser Gleichung haben wir bereits im § 47 geschlossen, daß die räumliche Dichte der freien Elektrizität an jedem Punkte des Feldes nach dem Gesetze

$$\varrho' = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{E} = \varrho_0' e^{-\frac{t}{\vartheta}}, \qquad \vartheta = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma},$$

abnimmt (vgl. 158, 158a), wo ϑ die sogenannte Relaxiationszeit ist. Das Abklingen einer durch ϱ_0' gegebenen Anfangsverteilung freier Elektrizität ist also ganz unabhängig von den elektromagnetischen Störungen, die von außen her in das Innere des homogenen Leiters eindringen. Nehmen wir z. B. an, daß zur Zeit $t = 0$ das Feld im Innern des Leiters Null war, so ist auch $\varrho_0' = 0$ und daher ϱ', die Dichte der freien Elektrizität, dauernd gleich Null. Aus der so gewonnenen Gleichung

$$\text{(206d)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$$

und aus (206c) schließen wir nun, ganz ebenso wie im vorigen Paragraphen, daß nur transversale ebene elektromagnetische Wellen im Innern des homogenen Leiters sich fortpflanzen können. Auch läßt sich die Elimination von $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{H}$ in ganz entsprechender Weise ausführen wie dort. Sie ergibt für diese beiden Vektoren die Differentialgleichungen

$$\text{(206e)} \qquad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \nabla^2 \mathfrak{H},$$

$$\text{(206f)} \qquad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \nabla^2 \mathfrak{E},$$

die jetzt an die Stelle von (203e, f) treten.

Wir untersuchen wieder ebene homogene Wellen; wir legen die x-Achse in die Fortpflanzungsrichtung und zerlegen die in die Wellenebenen fallenden Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ in ihre Komponenten Wir betrachten auch hier nur die Komponenten $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_z$, die, optisch gesprochen, einer geradlinig und zwar parallel der z-Achse polarisierten Welle angehören. Für $\mathfrak{E}_y$ gilt sodann die partielle Differentialgleichung

$$\text{(206g)} \qquad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2},$$

die man als „Telegraphengleichung“ bezeichnet. Derselben Differentialgleichung hat auch $\mathfrak{H}_z$ zu genügen.

Wir wollen uns etwa den Leiter durch die (xy)-Ebene begrenzt denken und ebene Wellen senkrecht auf diese Ebene fallend annehmen. Für $x = 0$ nehmen wir einen periodischen Schwingungszustand als gegeben an, von der Frequenz ν. Dieser An-

nahme entspricht der reelle Teil des komplexen Ausdruckes $ae^{i\nu t}$, durch den wir die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}_y$ in der (yz)-Ebene darstellen wollen. Wir suchen nun der Differentialgleichung (206g) durch den Ansatz

$$\mathfrak{E}_y = ae^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)} \tag{207}$$

zu genügen. Der reelle Teil des Ausdruckes gibt eine physikalisch zulässige Lösung der linearen Differentialgleichung.

Damit der komplexe Ausdruck (207) die vorgelegte Differentialgleichung erfüllt, ist die komplexe Konstante p^2 folgendermaßen zu bestimmen:

$$p^2 = \varepsilon\mu - i\frac{4\pi\sigma\mu}{\nu}. \tag{207a}$$

Wir wählen für p diejenige Wurzel, deren reeller Teil positiv ist, und zerlegen diese in den reellen und imaginären Bestandteil

$$p = n - i\varkappa. \tag{207b}$$

Die physikalische Bedeutung der reellen Größen n, $\varkappa$ erkennen wir, indem wir sie in (207) einführen; es wird

$$\mathfrak{E}_y = ae^{-\frac{\varkappa\nu x}{c}} \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{nx}{c}\right)}. \tag{207c}$$

Es ist, wie dieser Ausdruck zeigt, $\frac{c}{n}$ die Geschwindigkeit, mit der die Wellenphasen im Leiter forteilen, daher n der **Brechungsindex** des Leiters. Da ferner

$$\frac{\varkappa\nu x}{c} = \varkappa\frac{2\pi x}{\lambda}$$

ist, wenn λ die Wellenlänge von Wellen der Frequenz ν im Vakuum bedeutet, so nimmt die Amplitüde der Wellen im Leiter beim Fortschreiten um eine Wellenlänge im Verhältnis $e^{-2\pi\varkappa}$ ab. Die so definierte Konstante $\varkappa$ nennt man den „**Extinktionskoeffizienten**“.

Der Brechungsindex n und der Extinktionskoeffizient $\varkappa$ hängen nun mit den elektromagnetischen Stoffkonstanten ε, μ, σ und der Schwingungsdauer

$$\tau = \frac{2\pi}{\nu}$$

durch die aus (207a, b) folgenden Gleichungen zusammen:

$$n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon\mu, \tag{207d}$$

$$n\varkappa = \sigma\mu\tau. \tag{207e}$$

Es folgt aus diesen beiden Gleichungen

$$n^2 + \varkappa^2 = \mu\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2},$$ daher

$$n^2 = \frac{\mu}{2}\left\{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2} + \varepsilon\right\}, \tag{207f}$$

$$\varkappa^2 = \frac{\mu}{2}\left\{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2} - \varepsilon\right\}. \tag{207g}$$

Diese beiden Konstanten bestimmen die Geschwindigkeit und die räumliche Dämpfung der im Leiter sich fortpflanzenden elektromagnetischen Wellen.

Wir haben jetzt durch den für $\mathfrak{E}_y$ gemachten Ansatz (207) die Differentialgleichung (206g) erfüllt. Der entsprechenden, für $\mathfrak{H}_z$ geltenden Differentialgleichung werden wir durch einen ähnlichen Ansatz

$$\mathfrak{H}_z = b e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)} \tag{208}$$

genügen. Damit durch (207, 208) auch die Feldgleichungen (206a, b) erfüllt werden, müssen die Konstanten a, b in einem bestimmten Verhältnis stehen. Gleichung (206b) ergibt

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x};$$ hieraus folgt

$$b = a\frac{p}{\mu} = \frac{a}{\mu}(n - i\varkappa). \tag{208a}$$

Die Konstanten a und b stehen hiernach in einem komplexen Verhältnis. Um die physikalische Bedeutung dieses Ergebnisses zu erkennen, bilden wir die reellen Teile von (207, 208), nachdem wir $a = |a|e^{i\alpha}$, $b = |b|e^{i\beta}$ gesetzt haben.

Dann wird

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= |a| e^{-\frac{2\pi\varkappa x}{\lambda}} \cos\left\{\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi n x}{\lambda} + \alpha\right\}, \\ \mathfrak{H}_z &= |b| e^{-\frac{2\pi\varkappa x}{\lambda}} \cos\left\{\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi n x}{\lambda} + \beta\right\}. \end{aligned}\right. \tag{208b}$$

Es bestimmen also α und β die Phasen der elektrischen und magnetischen Feldstärke in den Wellen. Für ebene Wellen in Isolatoren sind diese Phasen einander gleich; für ebene Wellen in dem Leiter aber folgt aus (208a)

$$\left|\frac{b}{a}\right| e^{i(\beta-\alpha)} = \frac{n - i\varkappa}{\mu}; \tag{208c}$$

setzen wir

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varkappa}{n}\right), \tag{208d}$$

so erhalten wir

$$|b| = \frac{|a|}{\mu}\sqrt{n^2 + \varkappa^2} = |a|\sqrt[4]{\frac{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2}{\mu^2}} \tag{208e}$$

und

$$\beta = \alpha - \gamma. \tag{208f}$$

Es bleibt daher in Leitern die magnetische Feldstärke der Wellen um den Winkel γ der Phase nach hinter der elektrischen Feldstärke zurück. Für einen Isolator wird $\gamma = 0$, und das Amplitüdenverhältnis der magnetischen und elektrischen Feldstärke wird gleich $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$, entsprechend der Gleichheit der elektrischen und magnetischen Energie der Wellen, die wir im vorigen Paragraphen feststellten. Gemäß (208e) ändert das Hinzukommen der Leitfähigkeit σ das Verhältnis der Amplitüden und hebt die Gleichheit der beiden Energiebeträge auf.

Wir haben die Beziehung (208a) zwischen den komplexen Konstanten a und b aus der zweiten der Feldgleichungen abgeleitet. Die erste Feldgleichung würde nichts Neues ergeben; sie würde nur zu der Gleichung (207a) für p^2 zurückführen.

Die Entwicklung Joulescher Wärme in Leitern bedingt die Extinktion der elektromagnetischen Wellen, die durch Gleichung (207g) angezeigt wird. Die elektromagnetische Lichttheorie behauptet also, daß die Isolatoren durchsichtig sind und daß nur leitende Körper das Licht absorbieren. Diese Behauptung entspricht im großen und ganzen den Tatsachen. Die besten Leiter, die Metalle, absorbieren das Licht am stärksten. Im einzelnen aber kommen, wie schon Maxwell selbst erkannt hat, Abweichungen vor. So sind die Elektrolyte, obwohl leitend, oft durchsichtig. Diese Tatsache aber erklärt sich, wie

E. Cohn bemerkt hat, ganz ungezwungen auf Grund des Faradayschen Gesetzes, wonach in Elektrolyten der elektrische Strom mit einer Massenbewegung verbunden ist. Auch in den Lichtwellen wird gleichzeitig mit der Elektrizität die mit der Elektrizität verkoppelte Masse schwingen müssen. Die Trägheit der elektrochemischen Ionen ist aber im Verhältnis zu ihrer elektrischen Ladung so beträchtlich, daß sie ein merkliches Mitschwingen in den hohen Frequenzen der Lichtwellen nicht gestattet; der Elektrolyt verhält sich dann wie ein Isolator.

Die Maxwellsche Theorie berücksichtigt, indem sie allgemein $\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}$ setzt, die individuellen Eigenschaften der stromführenden Ionen oder Elektronen nicht. Sie nimmt an, daß die Leitfähigkeit eines Körpers für stationären Strom auch noch bei beliebig rasch wechselnden Strömen maßgebend ist. Ganz entsprechend, wie die Gültigkeit der Maxwellschen Beziehung $\varepsilon = n^2$ für Licht- und Wärmestrahlen als Beweis für die Proportionalität von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ in den betreffenden Isolatoren gelten konnte, so wird die Gültigkeit der soeben für leitende Körper gewonnenen Beziehungen in der Optik ein Prüfstein für die Richtigkeit der Annahme Maxwells sein, daß Feldstärke $\mathfrak{E}$ und Dichte $\mathfrak{i}$ des Leitungsstromes auch für die schnellsten elektrischen Schwingungen in demselben Verhältnis stehen wie für stationären Strom. Der Gleichung (207g) zufolge müßte nun für Licht bestimmter Farbe die Absorption mit der Leitfähigkeit der Körper zunehmen. Ordnet man die Körper nach ihrer Durchsichtigkeit, so müßte ihre Reihenfolge die gleiche sein, wie wenn man sie nach dem reziproken Werte des Leitvermögens ordnet. Diese Beziehung zwischen Durchsichtigkeit und Leitvermögen hat sich nun gerade bei den metallischen Leitern im sichtbaren Spektralgebiet durchaus nicht bestätigt.

Um so mehr überraschte es, als neuerdings E. Hagen und H. Rubens feststellten, daß im ultraroten Spektralgebiete die optischen Eigenschaften der Metalle durchaus den Forderungen der Maxwellschen Theorie Genüge leisten. Wir wollen jetzt die Theorie dieser Versuche entwickeln.

§ 70. Das Reflexionsvermögen der Metalle.

Es wurde bisher nur die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in einem homogenen Körper betrachtet. In diesem Paragraphen wollen wir den Fall behandeln, daß die elektromagnetischen Wellen auf die Oberfläche eines metallischen Leiters fallen. Wir haben neben den Differentialgleichungen, die im Innern der aneinander grenzenden Körper gelten, noch die Bedingungen an ihrer Trennungsfläche heranzuziehen. Wir hatten diese Grenzbedingungen bisher nur für den Fall stationärer Felder in stromlosen Bereichen entwickelt (§ 56). Für ein beliebiges elektromagnetisches Feld ergeben sich die Grenzbedingungen durch sinngemäße Anwendungen der Integralsätze, die uns zu den Feldgleichungen führten. Diese Integralsätze besagen, daß das Linienintegral der magnetischen Feldstärke längs einer Kurve dem elektrischen Strome durch die umschlossene Fläche, und daß das Linienintegral der elektrischen Feldstärke längs einer Kurve der zeitlichen Abnahme des umschlungenen magnetischen Induktionsflusses proportional ist. Durch Übergang zu Flächenelementen ergaben sich aus diesen Sätzen die beiden Hauptgleichungen der Elektrodynamik. Diese Differentialgesetze verknüpfen den Wirbel von $\mathfrak{H}$ mit der Dichte des wahren elektrischen Stromes, den Wirbel von $\mathfrak{E}$ mit der Dichte des magnetischen Stromes (§ 59).

Die Anwendung der beiden Sätze auf die Trennungsfläche zweier Körper ergibt, daß die Dichten des elektrischen bzw. des magnetischen Flächenstromes dem Flächenwirbel der magnetischen bzw. elektrischen Feldstärke proportional sind. Wenn wir zulassen, daß der elektrische Strom auf eine unendlich dünne Schicht an der Oberfläche eines Metalles sich zusammendrängt, so wird dieser Flächenstrom mit einem Flächenwirbel der magnetischen Feldstärke verknüpft sein. Ein solcher flächenhafter Strom würde aber in der Oberflächenschicht unendliche räumliche Stromdichte besitzen. Da wir unendliche Werte der Feldstärken von vornherein ausschließen, so ist unendliche räumliche Dichte des wahren elektrischen Stromes nur bei unendlichen Werten von σ oder ε, unendliche Raumdichte des wahren magne-

tischen Stromes nur bei unendlichen Werten von μ möglich. Wir werden im nächsten Paragraphen den idealen Grenzfall eines vollkommenen Leiters erörtern, der unendlicher Leitfähigkeit σ entspricht. In Wirklichkeit aber kommen jenen drei Stoffkonstanten stets endliche Werte zu, es ist daher ein flächenhafter elektrischer oder magnetischer Strom auszuschließen. Hieraus ergeben sich die Grenzbedingungen: Der Flächenwirbel der elektrischen sowie der magnetischen Feldstärke an der Trennungsfläche zweier Körper ist gleich Null. Das heißt (§ 22): die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ durchsetzen stetig die Trennungsfläche zweier Körper.

Auf Grund dieser Grenzbedingungen soll nun das Problem der Metallreflexion in Angriff genommen werden. Das Metall soll gegen den leeren Raum durch eine Ebene begrenzt sein, die wir als (yz)-Ebene wählen. Auf diese Ebene fällt senkrecht ein periodischer Zug ebener, geradlinig polarisierter Wellen

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{H}_z = a' e^{i\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)}. \tag{209}$$

Dieser Ansatz ist in den für Wellen in Isolatoren abgeleiteten allgemeinen Ausdrücken (205), (205b), enthalten, er genügt also den Feldgleichungen. Die x-Achse weist nach dem Innern des Metalles hin. Für die reflektierte Welle machen wir den gleichfalls mit (205), (205b) verträglichen Ansatz

$$-\mathfrak{E}_y = \mathfrak{H}_z = a'' e^{i\nu\left(t + \frac{x}{c}\right)}. \tag{209a}$$

Die reellen Teile dieser komplexen Ausdrücke sollen die einfallenden und die reflektierten Wellen darstellen. Ihre Amplitüden werden durch die absoluten Beträge von a' bzw. a'' angegeben. Die in der einfallenden und der reflektierten Welle fortgepflanzten Strahlungen sind nach (205f) den Quadraten ihrer Amplitüden proportional. Der Quotient aus reflektierter und einfallender Strahlung

$$r = \frac{|a''|^2}{|a'|^2} \tag{209b}$$

ist das gesuchte „Reflexionsvermögen“ des Metalles für senkrechten Einfall.

Um dieses zu ermitteln, haben wir die Wellen zu berücksichtigen, die in das Innere des Metalles eindringen. Für die Feldstärken dieser Wellen führen wir die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Ausdrücke ein (207, 208, 208a):

$$\mathfrak{E}_y = a e^{i\nu\left(t - \frac{p x}{c}\right)}, \tag{209c}$$

$$\mathfrak{H}_z = a \frac{(n - i\varkappa)}{\mu} e^{i\nu\left(t - \frac{p x}{c}\right)}. \tag{209d}$$

Diese Feldstärken der in das Metall eindringenden Wellen sind nun mit denjenigen der im leeren Raume fortgepflanzten durch die im Eingange dieses Paragraphen entwickelten Grenzbedingungen verknüpft, welche Stetigkeit der tangentiellen Komponenten an der Trennungsfläche fordern. Die Feldstärken an der einen Seite der Trennungsfläche $x = 0$ erhält man, indem man diejenigen der einfallenden Welle (209) und der reflektierten (209a) addiert; die Feldstärken auf der anderen Seite der Trennungsfläche werden durch (209c, d) gegeben.

Sollen jederzeit die Komponenten $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_z$ zu beiden Seiten der Trennungsfläche einander gleich sein, so müssen die komplexen Konstanten a, a', a'' den Gleichungen genügen

$$\begin{cases} a' - a'' = a, \\ a' + a'' = a \dfrac{(n - i\varkappa)}{\mu}. \end{cases} \tag{209e}$$

Dieselben ergeben

$$\begin{cases} a' = \dfrac{1}{2} a \left\{+1 + \dfrac{n - i\varkappa}{\mu}\right\}, \\ a'' = \dfrac{1}{2} a \left\{-1 + \dfrac{n - i\varkappa}{\mu}\right\}, \end{cases} \tag{209f}$$

daher wird das Reflexionsvermögen nach (209b)

$$r = \left|\frac{n - \mu - i\varkappa}{n + \mu - i\varkappa}\right|^2 = \frac{(n - \mu)^2 + \varkappa^2}{(n + \mu)^2 + \varkappa^2}. \tag{210}$$

Brechungsindex n und Extinktionskoeffizient $\varkappa$ des Körpers sind dabei für jede Frequenz ν gemäß den Gleichungen (207f, g) durch

die im Gaußschen Maße gemessenen Stoffkonstanten ε, σ, μ zu bestimmen. Nach der Maxwellschen Theorie gilt (210) für jeden isotropen Körper, sowohl Isolator wie Halbleiter oder metallischen Leiter.

Da indessen, wie erwähnt, in dem sichtbaren Spektralbereiche die von der Maxwellschen Theorie geforderten Beziehungen sich nicht bestätigt haben, so wollen wir der Erörterung dieses Ausdruckes den Fall zugrunde legen, auf den die Beobachtungen von E. Hagen und H. Rubens sich beziehen. Diese Forscher untersuchten das Reflexionsvermögen von Metallspiegeln für langwellige ultrarote Strahlung von der Wellenlänge

$$\lambda = 1{,}2 \times 10^{-3} \text{ cm.}$$

Die Schwingungsdauer τ ist hier

$$\tau = \frac{\lambda}{c} = 0{,}4 \times 10^{-13} \text{ Sekunde.}$$

Die Leitfähigkeit σ des Kupfers z. B. ist in absolutem elektrostatischem Maße

$$\sigma = 5{,}14 \times 10^{17}.$$

Es wird demnach $2\sigma\tau = 4{,}11 \times 10^{4}$.

In den Gleichungen (207f, g) kommt nun die hypothetische Dielektrizitätskonstante des Metalles vor. Nimmt man an, daß $\varepsilon < 4$ ist, so ist für Kupfer der Quotient von ε^2 durch $4\sigma^2\tau^2$ kleiner als 10^{-8}. Es wird also für Kupfer, und auch für hundertmal schlechter leitende Metalle hier ε^2 zu streichen und $2\sigma\tau$ in (207f, g) an Stelle der Wurzel zu setzen sein. Dann steht auf der rechten Seite $2\sigma\tau \pm \varepsilon$. Für Kupfer bedeutet hier das Streichen des ε nur einen Fehler von 0,01 % für $\varepsilon < 4$, und auch für Stahl, der eine etwa zehnmal so kleine Leitfähigkeit besitzt, begehen wir nur einen geringen Fehler, wenn wir setzen

$$n = \varkappa = \sqrt{\mu\sigma\tau}. \tag{210a}$$

Beschränken wir uns ferner auf Metalle, deren magnetische Permeabilität nicht merklich von 1 abweicht, so erhalten wir als Wert des Reflexionsvermögens (210)

$$r = \frac{(\sqrt{\sigma\tau} - 1)^2 + \sigma\tau}{(\sqrt{\sigma\tau} + 1)^2 + \sigma\tau} = \frac{2\sigma\tau - 2\sqrt{\sigma\tau} + 1}{2\sigma\tau + 2\sqrt{\sigma\tau} + 1}$$

oder, da folgerichtig 1 gegen $2\sigma\tau$ zu vernachlässigen ist,

$$r = 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma\tau}} . \tag{210b}$$

Diese Formel für das Reflexionsvermögen der Metalle gegenüber langen Wellen haben nun E. Hagen und H. Rubens durchweg bestätigt gefunden (nur das Wismut macht eine Ausnahme). So ergibt z. B. für Kupfer die theoretische Formel

$$1 - r = \frac{2}{\sqrt{2{,}05 \times 10^4}} = 1{,}4 \times 10^{-2}.$$

Der Versuch ergab $1{,}6 \times 10^{-2}$.

Für schlechter leitende Metalle ist das Reflexionsvermögen entsprechend kleiner. Es hat bei gegebener Wellenlänge immer das Produkt $(1 - r)\sqrt{\sigma}$ für alle Metalle den gleichen Wert; dabei bedeutet $(1 - r)$ offenbar den in das Metall eindringenden Bruchteil der Strahlung d. h. das Absorptionsvermögen des Metalles.

Geht man zu Wärmestrahlen noch größerer Wellenlänge über, so weicht das Reflexionsvermögen der Metalle noch weniger von 1 ab, und der geringe Unterschied ist nur ungenau festzustellen. Daher haben die genannten Forscher es vorgezogen, für längere Wellen an Stelle des Reflexionsvermögens das Emissionsvermögen zu untersuchen. Nach dem Kirchhoffschen Gesetze ist bei gegebener Temperatur das Emissionsvermögen der Körper für Wärmestrahlen bestimmter Wellenlänge dem Absorptionsvermögen proportional. Es muß demnach für alle Metalle bei derselben Temperatur das Produkt aus Emissionsvermögen für strahlende Wärme bestimmter Wellenlänge und Wurzel aus der Leitfähigkeit den gleichen Wert haben. Auch dieses Gesetz haben die Versuche bestätigt; es ergab sich das Emissionsvermögen der Metalle gleich dem

Emissionsvermögen des schwarzen Körpers, multipliziert mit

$$1 - r = \frac{2}{\sqrt{\sigma \tau}},$$

übereinstimmend mit der Forderung der Theorie.

Diese Versuche sind in mehrfacher Hinsicht lehrreich. Das wichtigste Ergebnis ist: Bei den Metallen ist die von der Maxwellschen Theorie geforderte Beziehung $\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}$ selbst für die hohen Frequenzen der Wärmestrahlen noch gültig. Man kann das Reflexionsvermögen und Emissionsvermögen der Metalle aus ihrer elektrischen Leitfähigkeit bestimmen und umgekehrt die Leitfähigkeit des Metalles aus dem Reflexionsvermögen oder Emissionsvermögen für ultrarote Strahlen berechnen. Dieses Ergebnis bildet neben der Gültigkeit der Maxwellschen Beziehung für Gase die wichtigste Stütze der elektromagnetischen Lichttheorie.

Wir gelangten zu der Formel (210b), indem wir ε gegen $2\sigma\tau$ vernachlässigten. Das war jedenfalls erlaubt, wenn $1 \leqq \varepsilon \leqq 4$ war. Die Gültigkeit jener Formel zeigt, daß die Dielektrizitätskonstante hier nicht wesentlich in Betracht kommt; es ist daher gleichgültig, welchen Wert man dieser Konstanten zuschreibt. M. Planck hat bei der Ableitung der Formel (210b) die Dielektrizitätskonstante der Metalle gleich 1 gesetzt; E. Cohn hingegen hat befürwortet, den Wert dieser Konstanten zunächst unbestimmt zu lassen, indem er es als möglich betrachtet, daß zwischen den sichtbaren Strahlen und jenen langwelligen Strahlen es ein Gebiet gibt, wo der Wert von ε von Einfluß wird. Im sichtbaren Gebiete reicht, wie erwähnt, auch die Einführung zweier Konstanten σ und ε nicht zur Darstellung der Beobachtung an Metallen aus. Hier kommen offenbar die von der Maxwellschen Theorie nicht berücksichtigten Eigenschaften der stromführenden Teilchen zur Geltung. Eine befriedigende Theorie der Metallreflexion im sichtbaren und ultravioletten Gebiete steht noch aus.

Was nun drittens die magnetische Permeabilität anbelangt, so haben wir sie gleich 1 gesetzt, um zur Formel (210b) zu gelangen. Würde man μ in den Formeln (210), (210a) beibehalten, so würde der Einfluß der Permeabilität zum Ausdruck gebracht

werden. Nun gilt aber die Formel (210b) auch für die ferromagnetischen Metalle Eisen und Nickel; hier ist also bei diesen hohen Frequenzen nicht mehr der für statische oder langsam wechselnde Felder gültige Wert von μ einzuführen, sondern es ist μ nicht merklich von 1 verschieden anzunehmen, d. h. $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ zu setzen. Das ist um so bemerkenswerter, als nach Versuchen von V. Bjerknes beim Eindringen Hertzscher Wellen in ferromagnetische Metalle deren Permeabilität sich sehr wohl geltend macht. Es muß demnach im Intervalle zwischen den längeren Hertzschen Wellen und den Wärmestrahlen die Permeabilität der ferromagnetischen Metalle mit der Wellenlänge stark abnehmen. Nach neueren Versuchen von W. Arkadiew fällt der Wert der Permeabilität im Gebiete $10 \text{ cm} > \lambda > 1 \text{ cm}$ rasch ab, und wird für Wellen von einigen Millimetern Wellenlänge nahezu gleich eins; hiernach würde jene Abnahme noch im Bereiche der kürzesten elektrischen Wellen stattfinden.

§ 71. Das Eindringen elektrischer Schwingungen in Metalle; der vollkommene Leiter.

Die Resultate des letzten Paragraphen sind auch für die Theorie der elektrischen Wellen in engerem Sinne von Wichtigkeit. Gilt bis zu den ultraroten Wärmestrahlen herab der für stationären Strom maßgebende Wert der Leitfähigkeit σ, so wird derselbe für Hertzsche Wellen sicher gültig sein. Ist für die geringe Schwingungsdauer der Wärmestrahlen in Metallen ε gegen $2\sigma\tau$, d. h. der Verschiebungsstrom gegen den Leitungsstrom zu vernachlässigen, so wird das für die größere Schwingungsdauer der elektrischen Schwingungen in engerem Sinne gewiß erlaubt sein. Wir dürfen demnach in Metallen an Stelle der für Halbleiter gültigen Differentialgleichungen (206e, f) allgemein die folgenden setzen

$$(211) \qquad \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \nabla^2 \mathfrak{H}, \qquad \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \nabla^2 \mathfrak{E}. \qquad (211\text{a})$$

Für die Komponenten der Feldstärken gelten im Innern der Metalle Differentialgleichungen von der

Form der Wärmeleitungsgleichung. Das Eindringen der elektrischen Schwingungen in Metalle ist eine Erscheinung, welche dem Eindringen periodischer Temperaturschwankungen in Wärmeleiter ganz ähnlich ist.

Das Absorptionsvermögen nichtferromagnetischer Metalle für senkrecht auffallende Wellen, d. h. der in das Metall eindringende und von ihm absorbierte Teil der Energie ist nach (210b):

$$1 - r = \frac{2}{\sqrt{\sigma\tau}}. \tag{211b}$$

Für elektromagnetische Wellen von der Wellenlänge $\lambda = 30$ cm, d. h. von der Schwingungsdauer

$$\tau = \frac{\lambda}{c} = 10^{-9}\ \text{sec},$$

wird das Absorptionsvermögen des Kupfers ($\sigma = 5{,}14 \times 10^{17}$)

$$1 - r = \frac{2}{\sqrt{5{,}14 \times 10^{8}}} < 10^{-4}.$$

Für diese Wellen wirkt daher eine Kupferplatte nahezu wie ein vollkommener Spiegel. Noch genauer gilt das, wenn man zu noch langsameren Schwingungen übergeht. Doch ist dann die Reflexion der Wellen schwer zu verwirklichen, weil dabei eine ebene Oberfläche vorausgesetzt wird, deren Abmessungen groß gegen die Wellenlänge sind.

Wir wollen das Eindringen der Wellen in das Metall noch etwas genauer verfolgen. Da wir $\mu = 1$ gesetzt und ε gestrichen haben, so bestimmen sich Brechungsindex n und Extinktionskoeffizient $\varkappa$ aus (210a). Es ist

$$n = \varkappa = \sqrt{\sigma\tau}. \tag{211c}$$

Gleichung (208a) ergibt als Verhältnis der Konstanten b und a, das für das Amplitüdenverhältnis und die Phasendifferenz der elektrischen und der magnetischen Feldstärke maßgebend war,

$$b = a\sqrt{\sigma\tau}\,(1 - i), \tag{211d}$$

daher

$$|b| = |a|\sqrt{2\sigma\tau} \tag{211e}$$

(Gl. 208e) und

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{4}. \tag{211f}$$

(Gl. 208d, f)

Es ist also für jeden Wert von x die magnetische Feldstärke um 45^0 hinter der elektrischen an Phase zurück. Die Amplitüde $|b|$ der magnetischen Feldstärke ist beträchtlich größer als die Amplitüde $|a|$ der elektrischen Feldstärke.

Beim Eindringen in das Innere des Metalles nehmen die Amplitüden der Feldstärken nach der Exponentialfunktion

$$e^{-\frac{2\pi\varkappa x}{\lambda}}$$

ab (vgl. 208b). Die Amplitüden werden also auf den Bruchteil $e^{-2\pi}$ ihres an der Oberfläche herrschenden Wertes in einem Abstande

$$x = \frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{\lambda}{\sqrt{\sigma\tau}}$$

von der Oberfläche herabgesunken sein, die Energien mithin auf den Bruchteil $e^{-4\pi}$. Beträgt die Dicke einer metallischen Platte

$$(212) \qquad d = \frac{\lambda}{\sqrt{\sigma\tau}} = c\sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} \text{ Zentimeter},$$

so dringt praktisch die Strahlung nicht durch die Platte hindurch. In dem obigen Beispiele war

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma\tau}} = \frac{1}{\sqrt{5{,}14 \times 10^8}} = 0{,}44 \times 10^{-4}, \qquad \lambda = 30 \text{ cm},$$

daher

$$d = 1{,}32 \times 10^{-3} \text{ cm}.$$

Eine Kupferplatte von der Dicke eines hundertstel Millimeters läßt somit bereits praktisch Wellen jener Wellenlänge nicht hindurchdringen.

Geht man indessen zu langsameren Schwingungen über, so wächst die für das Abschirmen der elektrischen Wellen erforderliche Dicke der Metallplatte proportional der Wurzel aus der Schwingungsdauer. Für $\lambda = 3$ Kilometer muß die Kupferplatte eine Dicke von einem Millimeter besitzen, für $\lambda = 300$ Kilometer, entsprechend einer Schwingungsdauer von 10^{-3} Sekunden, eine Dicke von einem Zentimeter, um als Schirm für die elektromagnetischen Wechselfelder zu dienen. Stationäre magnetische Felder endlich werden durch eine Kupferhülle von endlicher Dicke überhaupt nicht abgeschirmt.

Nach (207) wird die räumliche Stromdichte im Innern des Metalles durch den reellen Teil des komplexen Ausdruckes gegeben:

(212a) $$\mathfrak{i}_y = \sigma \mathfrak{E}_y = \sigma a e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)}.$$

Wir wollen das über alle Schichten erstreckte Integral

(212b) $$\mathfrak{j}_y = \int_0^\infty dx \mathfrak{i}_y$$

berechnen. In dem idealen Grenzfalle, wo der Strom sich auf eine unendlich dünne Schicht an der Oberfläche des Metalles zusammendrängt, geht dieses Integral in die Dichte des „Flächenstromes“ über. Wir erhalten

(212c) $$\mathfrak{j}_y = \frac{\sigma a c}{i\nu p} e^{i\nu t}.$$

Andererseits folgt aus (208), (208a) für die magnetische Feldstärke an der Oberfläche des Metalles

(212d) $$\mathfrak{H}_z = b e^{i\nu t} = \frac{a p}{\mu} e^{i\nu t}.$$

Es besteht folglich zwischen den komplexen Ausdrücken von $\mathfrak{j}_y$ und $\mathfrak{H}_z$ die Beziehung

(212e) $$\mathfrak{H}_z = \frac{i\nu p^2}{\sigma\mu c} \mathfrak{j}_y.$$

Da nun bei Vernachlässigung des vom Verschiebungsstrom herrührenden Gliedes (207a) übergeht in

$$p^2 = -i\frac{4\pi\sigma\mu}{\nu},$$ so wird

(212f) $$\mathfrak{j}_y = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{H}_z.$$

Diese Beziehung besteht nicht nur zwischen den komplexen Ausdrücken von $\mathfrak{j}_y$ und $\mathfrak{H}_z$, sondern auch zwischen ihren reellen Teilen, welche den im Metalle fließenden Strom und die tangentielle Komponente der magnetischen Feldstärke an der Oberfläche darstellen; sie hätte auch unmittelbar aus der ersten Hauptgleichung abgeleitet werden können.

Für einen vollkommenen Leiter (von unendlicher Leitfähigkeit σ) wird die Dicke der Stromschicht unendlich klein (nach 212); $\mathfrak{j}_y$ gibt hier die Dichte des „Flächenstromes" an. Dieser schirmt das Innere gegen das Eindringen der elektrischen Wellen. Die Joulesche Wärmeentwickelung wird Null, das Absorptionsvermögen Null, das Reflexionsvermögen 1 (vgl. 211b). Der vollkommene Leiter ist ein idealer Spiegel für die elektromagnetischen Wellen.

Der Satz, daß elektrische Schwingungen nicht in das Innere vollkommener Leiter eindringen können, ist nicht auf ebene Begrenzung und senkrecht einfallende Wellen beschränkt, er gilt vielmehr allgemein. Um dieses einzusehen, gehen wir aus von den im Innern der Metalle geltenden Differentialgleichungen (211), (211a). Die räumliche Verteilung des Feldes im Innern des Leiters muß stetig sein, daher sind die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen sicher nicht unendlich. Geht man nun zum Grenzfall $\sigma = \infty$ über, so müssen die zeitlichen Änderungen der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ gleich Null sein, damit die linken Seiten nicht unendlich werden. Es dringt also das Wechselfeld nicht in das Innere des vollkommenen Leiters ein. Da außen ein Feld vorhanden ist, so ist die Grenzfläche des vollkommenen Leiters eine Unstetigkeitsfläche des Feldes, in der endliche Flächendichten der Elektrizität und des Leitungsstromes zuzulassen sind. Die Verteilung der Elektrizität und des Stromes findet eben derart statt, daß das Innere gegen das Eindringen des Feldes geschirmt wird. Der ideale Leiter spielt in der Elektrodynamik eine ähnliche Rolle wie die metallischen Leiter überhaupt in der Elektrostatik. Wir wollen nun die Grenzbedingungen, die an seiner Oberfläche vorzuschreiben sind, aufstellen.

Als wir im vorigen Paragraphen die Grenzbedingungen ableiteten, welche Stetigkeit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ verlangten, da schlossen wir ausdrücklich den Fall $\sigma = \infty$ aus. Wir wollen jetzt die Grenzbedingungen angeben, welche an der beliebig gestalteten Oberfläche eines vollkommenen, an ein beliebiges Dielektrikum angrenzenden Leiters gelten, dessen Inneres durch eine flächenhafte Verteilung von Elektrizität und

Leitungsstrom vor dem Eindringen des elektromagnetischen Wechselfeldes geschützt wird. Die räumliche Dichte des magnetischen Stromes muß auch hier endlich bleiben, die Flächendichte des magnetischen Stromes ist also Null, es verschwindet folglich der Flächenwirbel der elektrischen Feldstärke. Die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ sind demnach auch an der Begrenzungsfläche des vollkommenen Leiters stetig. Da nun im Innern des vollkommenen Leiters das elektrische Feld Null ist, so sind auch außen die tangentiellen Komponenten der Feldstärke Null, d. h. der Vektor $\mathfrak{E}$ steht senkrecht auf der Oberfläche des vollkommenen Leiters. Sein Betrag ist mit der Oberflächendichte der wahren Elektrizität durch die Beziehung verknüpft

$$\mathfrak{D}_n = \varepsilon \mathfrak{E}_n = 4\pi\omega \tag{213}$$

(n äußere Normale des Leiters). Denn im Innern ist das Feld und, da ε in Metallen keinesfalls unendlich ist, auch die Normalkomponente der elektrischen Verschiebung Null.

Die Flächendivergenz von $\mathfrak{B}$ ist Null, da wahrer Magnetismus nicht angenommen wird. Da innen durchweg $\mathfrak{B} = 0$ ist, so ist außen

$$\mathfrak{B}_n = \mu \mathfrak{H}_n = 0, \tag{213a}$$

d. h. der Vektor $\mathfrak{H}$ weist tangentiell zur Oberfläche des vollkommenen Leiters. Was aber die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{H}$ anbelangt, so sind sie mit denen des Flächenstromes $\mathfrak{j}$ durch den aus der ersten Hauptgleichung folgenden Satz verknüpft: Der Flächenwirbel von $\mathfrak{H}$ ist gleich der mit $4\pi/c$ multiplizierten Flächendichte des elektrischen Stromes. Dieses ergibt mit Rücksicht auf den Ausdruck (104) des Flächenwirbels

$$\frac{4\pi\mathfrak{j}}{c} = -[\mathfrak{n}\mathfrak{H}] = [\mathfrak{H}\mathfrak{n}].$$

Dabei zeigt der Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ die nach dem Innern des Metalles hinweisende Normalenrichtung an. Wählen wir diese wie oben als x-Achse, so folgt

$$(213b) \quad \begin{cases} \dfrac{4\pi \mathfrak{j}_y}{c} = \mathfrak{H}_z, \\ \text{wie oben in Gleichung (212f), und} \\ \dfrac{4\pi \mathfrak{j}_z}{c} = -\mathfrak{H}_y. \end{cases}$$

Daß die Vorzeichen hier richtig gefunden sind, ist mit Hilfe der Ampèreschen Regel leicht festzustellen.

In der Theorie der elektrischen Schwingungen kann man die Behandlung mancher Aufgaben dadurch vereinfachen, daß man die im Felde befindlichen Leiter als vollkommene betrachtet. Man erzielt dadurch in vielen Fällen eine recht gute Annäherung an die Wirklichkeit. Man muß dabei aber immer bedenken, daß im Grunde die Annahme unendlicher Leitfähigkeit unzulässig ist und wenn Widersprüche in den auf den obigen Grenzbedingungen fußenden Entwickelungen hervortreten, so muß man prüfen, ob diese sich nicht durch Berücksichtigung des endlichen Wertes der Leitfähigkeit beseitigen lassen.

§ 72. Fortpflanzung elektrischer Wellen längs zylindrischer Leiter.

Wir denken uns im Raume eine Anzahl von Leitern, die durch zylindrische Flächen mit parallelen Erzeugenden begrenzt sind. Im übrigen sei der Raum von einem homogenen isotropen Isolator mit der Dielektrizitätskonstante ε und der Permeabilität μ erfüllt. Die Leiter werden als unendlich gut leitend angenommen, so daß nur an ihrer Oberfläche Elektrizität und Leitungsstrom sich befinden; alsdann gelten an den durch die Leiteroberflächen gebildeten Begrenzungen des Dielektrikums die am Schlusse des vorigen Paragraphen entwickelten Grenzbedingungen.

Wir legen die x-Achse den erzeugenden Geraden der zylindrischen Leiteroberflächen parallel und betrachten Wellen, die sich im Dielektrikum längs der x-Achse fortpflanzen. Diese Wellen sollen jetzt nicht homogen sein, d. h. es sollen die Feldstärken von y und z abhängen. Wir wollen annehmen, daß diese längs der zylindrischen Leiter fortschreitenden Wellen transversal sind, d. h. wir wollen die Komponenten $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{H}_x$ gleich Null setzen. Die

Berechtigung dieser beiden Annahmen wird nachträglich dadurch zu beweisen sein, daß die Feldgleichungen und die Grenzbedingungen sich durch ihre Einführung erfüllen lassen.

Die Differentialgleichungen (203a—d), die im Innern des Dielektrikums gelten, ergeben, wenn

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{H}_x = 0 \qquad \text{gesetzt wird,}$$

(214) $$0 = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z},$$

(214a) $$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \qquad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = +\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x},$$

(214b) $$0 = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z},$$

(214c) $$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}, \qquad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = +\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x},$$

(214d) $$\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} = 0,$$

(214e) $$\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 0.$$

Die vier Gleichungen (214a, c) stimmen mit den Gleichungen (204a) des § 68 überein. Sie ergeben für die Komponenten $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ partielle Differentialgleichungen von der Form (204e, f). Letztere werden integriert, indem man z. B.

(215) $$\mathfrak{E}_y = f(x - wt, y, z) \qquad \text{setzt, wobei}$$

(215a) $$w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

die Geschwindigkeit homogener ebener Wellen ist (205a).

Das partikuläre Integral (215) entspricht Wellen, die mit der Geschwindigkeit w unverzerrt in der Richtung der x-Achse forteilen. Entsprechende Ausdrücke gelten auch für die anderen drei Komponenten. Aus der zugrunde gelegten Annahme der Transversalität der Wellen folgt demnach, daß die Geschwindigkeit der Wellenphasen der Geschwindigkeit homogener ebener Wellen gleich ist, und daß ihre Amplitüde sich beim Fortschreiten nicht ändert. Kommt hingegen die Absorption der Energie in den Leitern in Betracht, so ist die Geschwindigkeit der Wellen kleiner, und es nimmt

beim Fortschreiten der Welle ihre Amplitüde ab; dann sind die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ nicht streng transversal.

Wir untersuchen zunächst die Verteilung des Feldes in einer zur (yz)-Ebene parallelen Ebene; später kommen wir dann auf die Fortpflanzung der Welle, d. h. die Abhängigkeit der Feldstärken von x und t, zurück.

Für gegebene Werte von x und t sind die Komponenten $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$ hier nicht unabhängig voneinander, sondern sie sind durch die Differentialgleichungen (214b, e) miteinander verknüpft; andererseits müssen die Komponenten $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ den Differentialgleichungen (214), (214d) genügen. Hierzu treten die Grenzbedingungen, die an der Oberfläche der Leiter gelten: An den Schnittkurven $s_1, s_2 \ldots$ der Leiteroberflächen mit der betrachteten Wellenebene muß die tangentielle Komponente von $\mathfrak{E}$ und die Normalkomponente von $\mathfrak{H}$ gleich Null sein. Wir betrachten zunächst das elektrische Feld.

Nach (214b) verschwindet im Innern des Dielektrikums die x-Komponente von curl $\mathfrak{E}$; auch Flächenwirbel von $\mathfrak{E}$ an den Leiteroberflächen sind durch die Grenzbedingungen ausgeschlossen. Es ist demnach das Linienintegral von $\mathfrak{E}$ für alle in Wellenebenen verlaufenden geschlossenen Kurven Null; dieser Vektor leitet sich, wenn man die Betrachtung auf solche Ebenen beschränkt, aus einem einwertigen Skalar Φ ab:

$$(215\text{b}) \qquad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Nach (214e) hat dieser Skalar der Gleichung zu genügen:

$$(215\text{c}) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Längs der Schnittkurven der Leiteroberflächen soll den Grenzbedingungen zufolge der tangentielle Gradient von Φ Null sein, d. h. Φ soll auf den Kurven $s_1, s_2 \ldots$ konstant sein. Sein normaler Gradient, integriert über die Schnittkurve, ergibt den von jener Kurve ausgehenden Kraftfluß

$$\int \mathfrak{E}_n ds_1 = -\int \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} ds_1.$$

Multipliziert man mit εdx, so erhält man die elektrische Ver-

schiebung, welche von einem Stücke des ersten Leiters von der Länge dx ausgeht. Wir wollen diese Verschiebung gleich $4\pi e_1 dx$ setzen, indem wir unter e_1 die auf die Längeneinheit des ersten Leiters berechnete wahre Ladung verstehen. Entsprechende Bedeutung werde den Größen $e_2, e_3 \ldots$ beigelegt. Dann gilt:

$$(215\text{d}) \quad e_1 = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\int \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} ds_1, \qquad e_2 = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\int \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} ds_2, \ldots$$

Es wird nun eine Funktion $\Phi(x, y)$ gesucht, welche der Differentialgleichung (215c) genügt, auf den Kurven $s_1, s_2 \ldots$ konstant ist und mit den Ladungen e_1, e_2 durch die Gleichungen (215d) verknüpft ist. Dieses Problem fällt durchaus zusammen mit dem elektrostatischen Probleme, bei gegebenen Ladungen der unendlichen zylindrischen Leiter das elektrostatische Potential zu bestimmen. Denn dieses elektrostatische Potential genügt der Laplaceschen Gleichung; da es von x unabhängig ist, so geht die Laplacesche Gleichung in ihre zweidimensionale Form (215c) über. Auch sonst sind die Bedingungen die nämlichen. Wir schließen, wofern das elektrostatische Problem sich lösen läßt, daß die Funktion Φ jenen Bedingungen gemäß sich bestimmen lassen muß.

Es muß jedoch eine Einschränkung gemacht werden, die wir bei der Behandlung der Elektrostatik, wo wir nur von Leitern endlicher Ausdehnung sprachen, nicht erwähnt haben. Es muß, damit das Problem eine physikalisch zulässige Lösung besitze, die Summe der Ladungen

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \cdots = 0$$

sein für einen jeden Querschnitt durch das Leitersystem. Um dieses einzusehen, legen wir um eine der Leitung parallele Achse einen Kreiszylinder, der das ganze Leitersystem einschließt und dessen Querschnittsradius R groß gegen die Abmessungen der Leiterquerschnitte und gegen ihre Abstände ist. Die elektrische Verschiebung, die aus der Längeneinheit des Zylinders heraustritt, ist gleich

$$\frac{2e}{R},$$

d. h. das elektrische Feld ist auf dem Zylinder gleich dem einer

geladenen Linie von der Ladung e pro Längeneinheit. Außerhalb des Zylinders gilt derselbe Ausdruck. Es nimmt also die elektrische Energiedichte mit wachsendem R ab, wie

$$\psi = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon R^2}.$$

Für die außerhalb des Zylinders befindliche elektrische Energie erhält man somit

$$\int_R^\infty 2\pi R dR \psi = \frac{e^2}{\varepsilon}\int_R^\infty \frac{dR}{R}.$$

Dieser Ausdruck wird aber logarithmisch unendlich, es sei denn, daß $e = 0$ ist. Um einen unendlichen Wert der Energie zu vermeiden, müssen wir annehmen, daß die Summe aller Ladungen, die zwischen zwei beliebigen, die Leiter senkrecht durchschneidenden Ebenen liegen, gleich Null ist. Beispiele sind das Kabel, dessen innerer und äußerer Zylinder entgegengesetzt geladen sind, oder zwei parallele, jeweils in gegenüberliegenden Querschnitten entgegengesetzt geladene Drähte. Wellen längs eines einzelnen Drahtes aber fallen nicht in den Gültigkeitsbereich der hier dargelegten Methode, weil bei solchen e notwendig von Null verschieden ist. Daß der Einzeldraht hier auszuschließen ist, liegt an den einschränkenden Annahmen unendlich guter Leitfähigkeit bzw. transversaler Wellen. In der Tat ergibt die von A. Sommerfeld entwickelte strenge Theorie der längs eines Einzeldrahtes fortschreitenden Wellen, daß bei Berücksichtigung der endlichen Leitfähigkeit des Drahtes die Wellen nicht vollkommen transversal sind, und daß ihre Geschwindigkeit etwas geringer als diejenige ebener homogener Wellen ist.

Beschränken wir uns auf zwei Leiter, so ist

$$e_2 = -e_1$$

zu setzen. Wir verbinden zwei Punkte P_1, P_2 der beiden Leiter, die in demselben Querschnitte liegen, durch eine beliebige Kurve, die aber durchweg in einer zur x-Achse senkrechten Ebene verläuft. Dann ist das Integral

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{E}_s ds = \Phi_1 - \Phi_2$$

von dem Verlaufe der ebenen Kurve und der Lage der Punkte P_1, P_2 auf den beiden Leitern unabhängig. Wir wollen es als „Spannung“ bezeichnen. Es entspricht der Potentialdifferenz der beiden Leiter in dem elektrostatischen Probleme, doch reden wir hier bei Drahtwellen besser nicht von einem Potentiale, weil das elektrische Feld hier keineswegs wirbelfrei ist; es verschwindet nur die x-Komponente von curl $\mathfrak{E}$, nicht aber die beiden anderen Komponenten. Haben wir das elektrostatische Problem für die beiden unendlichen zylindrischen Leiter gelöst, so kennen wir auch die Kapazität der Längeneinheit des Systemes, die durch

(215e) $$e = K(\Phi_1 - \Phi_2)$$

bestimmt ist, und die elektrische Energie pro Längeneinheit der Leitung:

(215f) $$U = \frac{1}{2}(e_1 \Phi_1 + e_2 \Phi_2) = \frac{1}{2} \frac{e_1^2}{K}.$$

Wir gehen nunmehr zum magnetischen Felde über, dessen Verteilung in der betreffenden Wellenebene den Differentialgleichungen (214), (214d) gemäß zu wählen ist. Der Differentialgleichung (214d), welche das Verschwinden des freien Magnetismus im Innern des homogenen Dielektrikums ausdrückt, genügen wir durch den Ansatz

(216) $$\mu \mathfrak{H}_y = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \qquad \mu \mathfrak{H}_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Die Gleichung (214) geht hierdurch über in

(216a) $$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0.$$

Die Funktion Ψ stellt, für die betreffende Querschnittsebene der Leitung, eine Stromfunktion des Induktionsflusses dar. Ordnet man die Richtungen s, n einander so zu wie die y- und die z-Achse des Koordinatensystems, so folgt aus (216)

$$\mathfrak{B}_n = \mu \mathfrak{H}_n = -\frac{\partial \Psi}{\partial s}.$$

Die Grenzbedingung (213a), welche verlangt, daß an der Ober-

fläche eines vollkommenen Leiters die Normalkomponente der magnetischen Induktion verschwindet, erfüllen wir, indem wir die Funktion Ψ der Bedingung unterwerfen: Längs der Kurven s_1, s_2, in denen die Querschnittsebene die Leiteroberflächen schneidet, ist Ψ konstant. Es mögen Ψ_1, Ψ_2 die Werte sein, welche Ψ auf diesen Kurven annimmt.

Wir verbinden nun zwei Punkte P_1 und P_2, welche auf s_1 bzw. s_2 liegen, durch eine ganz in der Querschnittsebene verlaufende Kurve. Die durch diese Kurve hindurchtretende magnetische Induktion

$$(216\text{b}) \qquad \int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{B}_n ds = -\int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = \Psi_1 - \Psi_2$$

ergibt sich als unabhängig von dem Verlaufe der Kurve. Sie stellt den auf die Längeneinheit der Leitung bezogenen „Induktionsfluß der Leitung" dar.

Das magnetische Feld in der Querschnittsebene ist mit den in den Leitern fließenden Strömen J_1, J_2 durch die erste Hauptgleichung verknüpft; diese ergibt

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s}_1 = \frac{4\pi}{c} J_1, \qquad \oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s}_2 = \frac{4\pi}{c} J_2.$$

Da nach (216)

$$\mathfrak{H}_s = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

zu setzen ist (der Strom J_1 wird parallel der x-Achse gerechnet; äußere Normale n und Umlaufssinn s folgen sich nach der Ampèreschen Regel wie y- und z-Achse), so hat man

$$(216\text{c}) \quad J_1 = -\frac{c}{4\pi\mu}\int \frac{\partial \Psi}{\partial n_1} ds_1, \qquad J_2 = -\frac{c}{4\pi\mu}\int \frac{\partial \Psi}{\partial n_2} ds_2'.$$

Die Funktion Ψ ist für jede Querschnittsebene dadurch bestimmt, daß sie der der Gleichung (216a) genügt, auf den Querschnittskurven s_1 und s_2 konstante Werte annimmt und durch (216c) mit den Stromstärken J_1, J_2 zusammenhängt.

Denkt man sich die Verteilung des Flächenstromes, der senkrecht zu s_1, s_2 längs der Leiter fließt, durch einen stationären Strom verwirklicht, so würde dessen Feld in der betrachteten Wellenebene genau mit dem magnetischen Felde der Wellen über-

einstimmen. Das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ dieses stationären Stromes würde parallel der x-Achse gerichtet sein. $\mathfrak{A}_x$ wäre von x unabhängig, so daß die Laplacesche Gleichung, der $\mathfrak{A}$ zu genügen hat, übergeht in

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2} = 0 .$$

Ersetzt man Ψ durch $\mathfrak{A}_x$, so erhält man auf Grund der Beziehung

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} = \text{curl}\, \mathfrak{A}$$

die Gleichungen (216, 216a, c). Die Grenzbedingung, daß Ψ für s_1, s_2 konstant ist, gilt allerdings für den stationären Strom, der in den Leitern wirklich fließt, nicht, da dessen magnetisches Feld in das Innere der Leiter eindringt. Doch kann man die hier geforderte flächenhafte Stromverteilung annähernd durch röhrenförmige Leiter herstellen.

Der Form nach stimmen die Bedingungen, welche für die Funktionen Φ und Ψ gelten, durchaus überein. Beide Funktionen müssen auf s_1, s_2 konstant sein, im Dielektrikum derselben Differentialgleichung genügen und in dem durch (215d) bzw. (216c) ausgedrückten Zusammenhange mit den Ladungen der Leiter bzw. den in den Leitern fließenden Strömen stehen. Ist das elektrische Feld der längs der Leitung fortschreitenden Wellen für gegebene Ladungen e_1, e_2 der Leiter bestimmt, so ergibt sich sofort das magnetische Feld, das gegebenen Strömen J_1, J_2 entspricht. Es gehen die für Ψ geltenden Gleichungen einfach aus den für Φ geltenden hervor, indem gesetzt wird

an Stelle von e_1: $\quad J_1 \frac{\varepsilon\mu}{c}$,

an Stelle von e_2: $\quad J_2 \frac{\varepsilon\mu}{c}$.

Der oben für zwei Leiter eingeführten einschränkenden Bedingung

$$e_1 + e_2 = 0$$

entspricht hier die Bedingung

$$J_1 + J_2 = 0 .$$

Dieselbe ergibt sich auch aus dem Grundsatz des quellenfreien Stromes. In der Tat haben wir vorausgesetzt, daß die

longitudinale Komponente von $\mathfrak{E}$ verschwindet; es werden daher die senkrecht zur Leitung verlaufenden Ebenen von Verschiebungsströmen nicht durchflossen. Durch eine jede solche unendliche Ebene muß demnach im ganzen derselbe Leitungsstrom parallel wie entgegen der x-Achse fließen.

Da nun J_2 entgegengesetzt gleich J_1 ist, und e_2 entgegengesetzt gleich e_1, so ist Ψ durch J_1 allein bestimmt, und zwar ebenso wie Φ durch $e_1 \cdot \frac{\varepsilon\mu}{c}$. Ist für eine gegebene Leitung die für das elektrische Feld maßgebende Funktion Φ gefunden, so ist demnach die für das magnetische Feld maßgebende Funktion Ψ ohne weiteres anzugeben. Es ist einfach $J_1 \frac{\varepsilon\mu}{c}$ statt e_1 zu schreiben, wodurch Φ in Ψ übergeht. Für jeden Punkt des Querschnittes gilt also

$$\Psi = J_1 \frac{\varepsilon\mu}{c e_1} \Phi.$$

Die Kurven $\Phi =$ konstans schneiden, da nach (215b) $\mathfrak{E}$ in der Querschnittsebene der negative Gradient von Φ ist, die elektrischen Kraftlinien senkrecht. Andererseits wird die Gleichung der magnetischen Induktionslinien, weil nach (216) Ψ die Stromfunktion des quellenfreien Vektors $\mu\mathfrak{H}$ ist, durch $\Psi =$ konstans gegeben. Aus der Proportionalität der Funktionen Φ und Ψ können wir jetzt den Schluß ziehen: In jeder Querschnittsebene stellen die elektrischen Kraftlinien und die magnetischen Induktionslinien zwei zueinander orthogonale Kurvenscharen dar.

Haben wir Φ auf Grund der elektrostatischen Analogie berechnet, so ist nach (215e)

$$\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{e_1} = \frac{1}{K},$$

wo K, die Kapazität der Längeneinheit der Leitung, eine von e_1 unabhängige Konstante der Leitung ist. Aus der Beziehung zwischen den Funktionen Φ und Ψ folgt jetzt

$$\frac{\Psi_1 - \Psi_2}{J_1 \frac{\varepsilon\mu}{c}} = \frac{1}{K}.$$

Wir bestimmen durch die Gleichung

$$(216\text{d}) \qquad \Psi_1 - \Psi_2 = \frac{L}{c} J_1 ,$$

die Größe L, die wir die „Selbstinduktion der Längeneinheit der Leitung" nennen. Dann erhalten wir

$$(216\text{e}) \qquad LK = \varepsilon \mu .$$

Das Produkt aus Selbstinduktion und Kapazität pro Längeneinheit der Leitung ist gleich dem Produkte aus Dielektrizitätskonstante und magnetischer Permeabilität des Isolators. — Da L und K auf die Längeneinheit bezogen sind, so sind im Gaußschen Systeme beides reine Zahlen, so daß in Gleichung (216e) die Dimensionen beiderseits übereinstimmen. Wir können die Gleichung (215a) für die Geschwindigkeit der Wellen jetzt auch schreiben

$$(216\text{f}) \qquad w = \frac{c}{\sqrt{LK}} .$$

Was die magnetische Energie pro Längeneinheit der Leitung anbelangt, so wird sie durch

$$(216\text{g}) \qquad T = \frac{1}{2} \frac{L}{c^2} J_1^2 \qquad \text{gegeben.}$$

Wir kommen jetzt auf die Abhängigkeit der Feldstärken von x und t zurück, d. h. auf die Fortpflanzung der Wellen längs der Leitung. Leitet man aus den beiden Funktionen Φ, Ψ vermöge (215b) und (216) das elektrische und das magnetische Feld ab, so werden, wie wir zeigten, die Feldgleichungen (214), (214b), (214d), (214e) erfüllt. Es bleibt nur übrig, zu beweisen, daß (214a, c) gleichfalls befriedigt sind. Diese Gleichungen lauten jetzt

$$(217) \qquad \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x},$$

$$(217\text{a}) \qquad \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial t} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}, \qquad - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}.$$

Dieselben sind erfüllt, wenn allgemein die Beziehungen

$$(217\text{b}) \qquad \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad - \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad \text{gelten.}$$

Nun ist für eine Leitung, die aus zwei jeweils entgegengesetzt

geladenen und von entgegengesetzten Strömen durchflossenen Leitern besteht,

$$\Phi = e_1 \Phi_0(y, z) \tag{217c}$$

zu setzen.

Dabei ist $\Phi_0(y, z)$ das elektrostatische Potential der beiden mit den Ladungen $e_1 = +1, \quad e_2 = -1$ pro Längeneinheit versehenen zylindrischen Leiter. Diese Darstellung für Φ folgt aus dem oben Dargelegten mit Rücksicht darauf, daß die für Φ geltenden Bedingungsgleichungen linear sind. Entsprechend gilt, wie wir sahen,

$$\Psi = J_1 \frac{\varepsilon\mu}{c} \Phi_0(y, z). \tag{217d}$$

Demgemäß geht (217b) über in

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} = -\frac{\partial J_1}{\partial x}, \tag{217e}$$

$$-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial J_1}{\partial t} = \frac{\partial e_1}{\partial x}. \tag{217f}$$

In der Kirchhoffschen, auf den Anschauungen der Fernwirkungstheorie beruhenden Behandlung der elektrischen Wellen in Drähten wird die erste dieser Gleichungen daraus abgeleitet, daß die zeitliche Änderung der Ladung $e_1 dx$ eines Stückes dx des ersten Drahtes gleich dem Überschuß des eintretenden über den austretenden Strom ist. Die zweite der Gleichungen aber kann man nach (216e) auch schreiben

$$-\frac{L}{c^2}\frac{\partial J_1}{\partial t} = \frac{1}{K}\frac{\partial e_1}{\partial x}. \tag{217g}$$

In dieser Gestalt wurde sie in der Fernwirkungstheorie durch Anwendung des Induktionsgesetzes gewonnen. Wir sehen hier, daß die Maxwellsche Theorie, die vom Standpunkte der Nahewirkung aus die Drahtwellen betrachtet, im vorliegenden Falle zu Ergebnissen gelangt, die mit denen der Fernwirkungstheorie übereinstimmen.

Die Elimination von J_1 ergibt für e_1 die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2}, \tag{218}$$

deren allgemeine Lösung ist

$$e_1 = f(x - wt) + g(x + wt), \quad w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{218a}$$

Die Gleichungen (217e, f) werden erfüllt, wenn außerdem gilt

(218b) $$J_1 = w\{f(x - wt) - g(x + wt)\}.$$

Der allgemeinen Lösung entsprechen zwei Ladungs- und Stromwellen, die längs der Leitung in entgegengesetzten Richtungen laufen. Durch Einführung in (217c, d) bestimmen sich die Funktionen Φ, Ψ, aus denen sich vermöge (215b) und (216) das elektromagnetische Feld ableitet. Die so erhaltene Lösung ist die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichungen (214—214e) unter den vorliegenden Grenzbedingungen. Es ist also die allgemeinste Lösung der Feldgleichungen und der Grenzbedingungen, welche mit dem Verschwinden der longitudinalen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ verträglich ist.

Wir betrachten die Wellen, die in Richtung der positiven x-Achse fortschreiten. Die elektrische Energie pro Längeneinheit der Leitung ist nach (215f), (218a)

(218c) $$U = \frac{1}{2}\frac{e_1^2}{K} = \frac{1}{2}\frac{f^2(x - wt)}{K}.$$

Die magnetische Energie pro Längeneinheit der Leitung hingegen ist nach (216g) und (218b)

(218d) $$T = \frac{1}{2}\frac{L}{c^2}J_1^2 = \frac{1}{2}\frac{L}{\varepsilon\mu}f^2(x - wt).$$

Nach (216e) folgt

(218e) $$T = U.$$

Die magnetische Energie der Drahtwellen ist im vorliegenden Falle der elektrischen gleich. Die pro Sekunde durch eine feste Querschnittsebene hindurchtretende Energie ist

$$w(U + T) = w\,2\,U = \frac{wf^2(x - wt)}{K},$$

oder nach (215e) und (218a, b)

$$J_1(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Der gesamte Energiestrom längs der Leitung ist das Produkt aus Stromstärke und Spannung.

Wir behandeln jetzt die beiden wichtigsten Fälle, das Kabel und die Paralleldrähte.

§ 73. Wellen in Kabeln.

Die Leitung, längs der die Wellen fortschreiten, soll aus zwei konzentrischen, vollkommen leitenden Kreiszylindern bestehen. Es soll b der Querschnittsradius der äußeren Begrenzung des inneren Zylinders, a der Querschnittsradius der inneren Begrenzung des äußeren Zylinders sein. Es handelt sich nun darum, für dieses System das elektrostatische Problem zu lösen, d. h. das elektrostatische Feld zu bestimmen, das sich herstellt, wenn $+e_1$ die Ladung des inneren, $-e_1$ die Ladung des äußeren Zylinders pro Längeneinheit ist.

Da die beiden Zylinder als vollkommen leitend betrachtet werden, so ist das Feld auf den zwischen ihnen befindlichen leeren oder von einem dielektrischen Körper erfüllten Raum beschränkt. Das Feld ist hier leicht anzugeben, da ja Symmetrie um die gemeinsame Achse der beiden Zylinder besteht. Legt man einen konzentrischen Zylinder vom Querschnittsradius r durch das Feld, so beträgt die elektrische Verschiebung durch die Längeneinheit des Zylinders:

$$4\pi e_1 = 2\pi r \mathfrak{D}_r = 2\pi r \varepsilon \mathfrak{E}_r .$$

Es ist demnach die radiale elektrische Feldstärke

$$\mathfrak{E}_r = \frac{2e_1}{r\varepsilon} = + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2e_1}{\varepsilon} \, ln r\right) \cdot$$

Die anderen Komponenten von $\mathfrak{E}$ verschwinden nach Symmetrie; es ist daher das elektrostatische Potential

$$\Phi = -\frac{2e_1}{\varepsilon} \, ln r , \tag{219}$$

mithin die Spannung zwischen dem inneren und dem äußeren Zylinder

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{2e_1}{\varepsilon} \, ln\left(\frac{a}{b}\right), \tag{219a}$$

und die Kapazität der Längeneinheit des Kabels

$$K = \frac{e_1}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{\varepsilon}{2 ln\left(\frac{a}{b}\right)} . \tag{219b}$$

Die magnetischen Kraftlinien verlaufen in konzentrischen

Kreisen um die Zylinderachsen. Der Betrag der Feldstärke ist nach der ersten Hauptgleichung

$$|\mathfrak{H}| = \frac{2J_1}{cr},$$

mithin der gesamte Induktionsfluß pro Längeneinheit des Kabels

$$\int_b^a dr \mu |\mathfrak{H}| = \frac{2\mu J_1}{c} \int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{2\mu J_1}{c} ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

Da andererseits die gesamte Induktion pro Längeneinheit durch

$$\frac{L}{c} J_1$$

ausgedrückt wird (vgl. 216d), so folgt

$$L = 2\mu ln\left(\frac{a}{b}\right) \tag{219c}$$

als Selbstinduktion pro Längeneinheit des Kabels.

Wie man sieht, genügen Kapazität und Selbstinduktion des Kabels (219b, c) der allgemeinen, im vorigen Paragraphen aufgestellten Beziehung (216e):

$$KL = \varepsilon\mu.$$

Je kleiner der Quotient $\frac{a}{b}$ der Querschnittsradien der äußeren und inneren Begrenzung der dielektrischen Schicht ist, desto größer ist die Kapazität, desto kleiner die Selbstinduktion des Kabels.

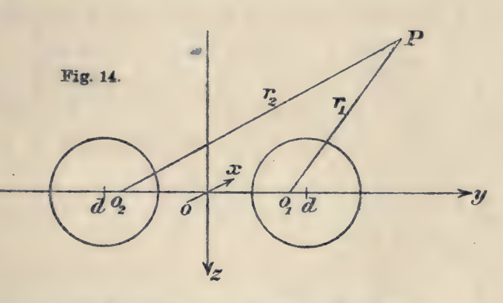
§ 74. Wellen längs zweier paralleler Drähte.

Der Ausdruck (219) stellt das elektrostatische Potential einer gleichförmig geladenen unendlichen Geraden dar. Man überzeugt sich leicht davon, daß er der Differentialgleichung (215c) Genüge leistet. Wir können aus ihm sofort neue Lösungen dieser Differentialgleichung ableiten, indem wir die Potentiale mehrerer paralleler Geraden zusammensetzen. Wir denken uns z. B. durch zwei Punkte O_1 und O_2 senkrecht zu ihrer Verbindungslinie zwei Gerade gelegt und diese mit den Ladungen $\pm e_1$ pro Längeneinheit versehen. Das elektrostatische Potential ist dann

$$(220) \qquad \Phi = -\frac{2e_1}{\varepsilon} \, ln\, r_1 + \frac{2e_1}{\varepsilon} \, ln\, r_2 = \frac{2e_1}{\varepsilon} \, ln \left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

wenn r_1, r_2 die Abstände eines Aufpunktes P von den beiden Geraden bezeichnet. In Figur 14 ist ein Querschnitt durch die Punkte O_1 und O_2 gelegt; der Koordinatenanfang O halbiert die Verbindungslinie $O_2 O_1$, deren Länge wir gleich 2η setzen wollen. $O O_1$ zeigt die Richtung der y-Achse an, die z-Achse ist gleichfalls in der Querschnittsebene gelegen, während die x-Achse den beiden Geraden parallel weist.

Die Punkte O_1, O_2 sind aus dem Felde auszuschließen, da in ihnen das Potential unendlich wird. Wir wollen sie in zwei zylindrische Flächen einhüllen, auf denen Φ konstant ist. Ersetzen wir diese Flächen durch die Oberflächen zweier leitender Zylinder, so erfüllt Φ bereits die an solchen Flächen dem elektrostatischen Potentiale vorgeschriebene Grenzbedingung. Aus dem um O_1 gelegten Zylinder dringt pro Längeneinheit die elektrische Verschiebung e_1, aus dem um O_2 gelegten die entgegengesetzte $-e_1$ heraus. Außerhalb der beiden Zylinder stellt demnach (220) das Potential des elektrostatischen Feldes dar, welches sich wirklich herstellt, wenn den beiden leitenden Zylindern die Ladungen $\pm e_1$ pro Längeneinheit gegeben werden.



Nun ist, wie aus der elementaren Geometrie bekannt ist, der geometrische Ort der Punkte, für die das Verhältnis $r_2 : r_1$ der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist, ein Kreis, der einen der beiden festen Punkte exzentrisch einschließt. Wir erhalten demnach aus (220) die Lösung des elektrostatischen Problems für den Fall zweier Kreiszylinder. Hieraus können wir, auf Grund der Entwicklungen des § 72, das Feld elektrischer Wellen längs zweier paralleler Drähte von kreisförmigem Querschnitt ableiten. Dabei dürfen sogar die Querschnittsradien der

beiden Drähte verschieden sein; wir wollen uns indessen auf den Fall beschränken, daß sie beide gleich b sind, und wollen mit $2d$ den Abstand der Drahtachsen bezeichnen (vgl. Figur 14).

Der Abstand d der Drahtachsen von O ist offenbar durch $OO_1 = \eta$ und durch den Querschnittsradius b bestimmt. Da die beiden Durchschnittspunkte des O_1 umschließenden Kreises in Figur 14 die Strecke $O_2 O_1$ in demselben Verhältnis teilen, so gilt

$$\frac{\eta + d - b}{\eta - d + b} = \frac{d + b + \eta}{d + b - \eta},$$

oder $$d^2 - (\eta - b)^2 = (\eta + b)^2 - d^2,$$ daher

$$d^2 = \eta^2 + b^2. \tag{220a}$$

Das Potential auf dem ersten Zylinder ist demnach

$$\Phi_1 = \frac{2e_1}{\varepsilon} \, ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{2e_1}{\varepsilon} \, ln\left(\frac{d + b + \eta}{d + b - \eta}\right).$$

Drückt man η durch d und b aus, so wird

$$\frac{d + b + \eta}{d + b - \eta} = \frac{d + b + \sqrt{d^2 - b^2}}{d + b - \sqrt{d^2 - b^2}} = \frac{\sqrt{d + b} + \sqrt{d - b}}{\sqrt{d + b} - \sqrt{d - b}} = \frac{d + \sqrt{d^2 - b^2}}{b},$$

daher

$$\Phi_1 = \frac{2e_1}{\varepsilon} \, ln\left(\frac{d + \sqrt{d^2 - b^2}}{b}\right). \tag{220b}$$

Auf dem anderen Zylinder hat $\frac{r_2}{r_1}$ den reziproken, Φ daher den entgegengesetzten Wert

$$\Phi_2 = -\Phi_1.$$

Es ist folglich die Spannung zwischen den beiden Drähten

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{4e_1}{\varepsilon} \, ln\left(\frac{d + \sqrt{d^2 - b^2}}{b}\right); \tag{220c}$$

die Kapazität der Längeneinheit der Leitung bestimmt sich aus

$$\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{e_1} = \frac{1}{K} = \frac{4}{\varepsilon} \, ln\left(\frac{d + \sqrt{d^2 - b^2}}{b}\right). \tag{220d}$$

Aus (216e) folgt die **Selbstinduktion der Längeneinheit der Leitung**

(220e) $$L = \frac{\varepsilon\mu}{K} = 4\mu\, ln\left(\frac{d + \sqrt{d^2 - b^2}}{b}\right).$$

Ist der Querschnittsdurchmesser $2b$ klein gegen den Abstand $2d$ der Drahtachsen, so gelten die Näherungswerte

(220f) $$L = \frac{\varepsilon\mu}{K} = 4\mu\, ln\left(\frac{2d}{b}\right).$$

In den Wellen, die sich längs der Paralleldrähte fortpflanzen, sind die Kurven, auf denen Φ konstant ist, eine Schar von Kreisen. Diese Kreise, zu denen auch die Begrenzungskreise der Drahtquerschnitte gehören, teilen harmonisch den Abstand $O_2 O_1$ zweier fester Punkte. Mit den zu den elektrischen Kraftlinien orthogonalen Kurven $\Phi =$ konstans fallen die magnetischen Induktionslinien $\Psi =$ konstans zusammen. Die elektrischen Kraftlinien, die orthogonal zu jenen Kreisen verlaufen, sind gleichfalls Kreise; dieselben gehen, wenn man sie in das Innere der Drähte fortgesetzt denkt, durch die festen Punkte O_1, O_2.

Die hier entwickelte Theorie beruht auf der Voraussetzung, daß die elektrischen Wellen nicht merklich in das Innere der Drähte eindringen. Bei den schnellen Hertzschen Schwingungen, bei denen Paralleldrähte häufig zur Fortleitung der Wellen verwandt werden, trifft diese Voraussetzung mit großer Annäherung zu. Bei langsamen Schwingungen, z. B. in Fernsprechleitungen, ist diese Voraussetzung für dünne Drähte nicht mehr zulässig (vgl. § 71, Formel 212). Hier ist bei der Berechnung der Selbstinduktion das magnetische Feld im Drahtinnern zu berücksichtigen, und es ist der Einfluß des Widerstandes auf die Wellenfortpflanzung in Betracht zu ziehen.

§ 75. Kondensator am Ende der Leitung.

Wir haben bisher angenommen, daß die Leitung beiderseits ins Unendliche reiche. In Wirklichkeit hat man es natürlich stets mit Leitungsdrähten von endlicher Länge zu tun. Wir wollen annehmen, daß die Drähte in die einander gegenüberstehenden Platten eines Kondensators einmünden. Es sei K_0 die

Kapazität des Kondensators, der bei $x = 0$ liegt. Von der Seite der negativen x treffe ein Zug einfach periodischer Wellen ein. Wir stellen denselben mathematisch dar, indem wir für die dort willkürliche Funktion $f(x - wt)$ des § 72 hier den komplexen Ausdruck setzen

$$f(x - wt) = A' e^{i\nu\left(t - \frac{x}{w}\right)}. \tag{221}$$

Nach (218a), (215e) ist dann die Spannung im einfallenden Wellenzuge gleich dem reellen Teile von

$$\Phi_1' - \Phi_2' = \frac{e_1'}{K} = \frac{A'}{K} e^{i\nu\left(t - \frac{x}{w}\right)}. \tag{221a}$$

Der Strom aber ist nach (218b) gleich dem reellen Teile von

$$J_1' = w A' e^{i\nu\left(t - \frac{x}{w}\right)}. \tag{221b}$$

Die einfallende Welle wird nun den am Ende der Leitung befindlichen Kondensator laden. Hierdurch wird zunächst der Welle Energie entzogen. Es wird sich jedoch alsbald ein stationärer Schwingungszustand herstellen, wobei die Energie des Kondensators im Mittel konstant ist. Da Energieverluste durch Joulesche Wärme und durch Strahlung nicht in Betracht gezogen werden, so wird sich ein reflektierter, nach der Seite der negativen x hineilender Wellenzug ausbilden. Wir setzen für diesen

$$g(x + wt) = A'' e^{i\nu\left(t + \frac{x}{w}\right)}, \tag{222}$$

und gemäß (215e), (218a, b)

$$\Phi_1'' - \Phi_2'' = \frac{e_1''}{K} = \frac{A''}{K} e^{i\nu\left(t + \frac{x}{w}\right)}, \tag{222a}$$

$$J_1'' = - w A'' e^{i\nu\left(t + \frac{x}{w}\right)}. \tag{222b}$$

Die reellen Teile dieser Ausdrücke stellen den reflektierten Wellenzug dar.

Wir setzen nun die beiden Wellen zusammen. Die so erhaltene Spannung $\Phi_1 - \Phi_2$ soll am Ende der Leitung ($x = 0$) der jeweiligen Ladung des Kondensators entsprechen. Ist e_0 die

Ladung der mit dem ersten Drahte verbundenen Kondensatorplatte, so ist hier

(223) $\Phi_1 - \Phi_2 = \Phi_1' - \Phi_2' + \Phi_1'' - \Phi_2'' = \frac{e^{i\nu t}}{K}(A' + A'') = \frac{e_0}{K_0}$.

Die Stromstärken $\pm J_1$ andererseits müssen der zeitlichen Änderung der Ladungen $\pm e_0$ der Kondensatorplatten gleich sein:

(223a) $J_1 = J_1' + J_1'' = w e^{i\nu t}(A' - A'') = \frac{d e_0}{d t} = i \nu e_0$.

Durch Division der beiden letzten Gleichungen folgt

$$\frac{A' - A''}{A' + A''} = \frac{i\nu}{w}\frac{K_0}{K},$$ daher

(223b) $$\frac{A''}{A'} = \frac{1 - \frac{i\nu}{w}\frac{K_0}{K}}{1 + \frac{i\nu}{w}\frac{K_0}{K}}.$$

So bestimmt sich aus den am Ende der Leitung vorgeschriebenen Bedingungen das Verhältnis der komplexen Konstanten A'', A', die für Amplitüde und Phase der reflektierten und der einfallenden Welle maßgebend sind. Die absoluten Beträge von A' und A'', daher auch die Spannungs- und Stromamplitüden der beiden Wellen sind nach (223b) die gleichen. Wir können setzen

(223c) $A' = |A| e^{\gamma i}, \qquad A'' = |A| e^{-\gamma i}$ und erhalten

$$\frac{A''}{A'} = \frac{1 - i \operatorname{tg} \gamma}{1 + i \operatorname{tg} \gamma},$$ folglich

(223d) $$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\nu}{w}\frac{K_0}{K}.$$

Dabei gibt 2γ den Phasenvorsprung an, um den am Ende der Leitung die Spannung der einfallenden Welle derjenigen der reflektierten Welle voreilt.

Die durch Zusammensetzung der beiden Wellen entstandene Spannungsverteilung längs der Leitung wird gegeben durch

(224) $$\Phi_1 - \Phi_2 = 2\frac{|A|}{K}\cos\left(\frac{\nu x}{w} - \gamma\right)\cos(\nu t)$$

und die Stromverteilung durch

(224a) $$J_1 = -J_2 = w 2 |A| \sin\left(\frac{\nu x}{w} - \gamma\right)\sin(\nu t),$$

wie durch Addition der komplexen Ausdrücke für die Spannungen

und Ströme der beiden Wellen und durch Absonderung der reellen Teile folgt.

Wir ziehen zwei Grenzfälle in Betracht Der erste Grenzfall soll der sein, wo die Endkapazität K_0 gleich Null ist. Hier ergibt (223d), daß $\gamma = 0$ ist, d. h. daß für $x = 0$ die Spannungsphasen der einfallenden und der reflektierten Welle einander gleich sind. Die Stromstärken der beiden Wellen sind dann für $x = 0$ in entgegengesetzten Phasen. Demgemäß befindet sich nach (224) in diesem Falle am Ende der Leitung ein Spannungsbauch, nach (224a) ein Stromknoten.

Der andere Grenzfall ist $K_0 = \infty$. Hier wird $\gamma = \frac{\pi}{2}$, die Spannungen der beiden Wellen für $x = 0$ haben die Phasendifferenz $2\gamma = \pi$, die Stromstärken sind in gleichen Phasen. Demgemäß ist das Ende der Leitung ein Spannungsknoten und ein Strombauch.

Im allgemeinen Falle verhalten sich die Spannungsphasen so, als ob die Endkapazität beseitigt, d. h. $K_0 = 0$ gesetzt wäre, dafür aber die Leitung um die Strecke

$$\gamma \frac{w}{v} = \gamma \frac{\tau w}{2\pi} = \gamma \frac{\lambda}{2\pi} \tag{224b}$$

verlängert wäre. Dann würde in der Tat die reflektierte Welle, welche diese Strecke zweimal durchlaufen hat, erst dann bei $x = 0$ eintreffen, wenn die Spannung der einfallenden Welle bereits den Phasenvorsprung 2γ gewonnen hat. Im Grenzfalle $K_0 = \infty$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ würde die Verlängerung der Leitung, welche der Endkapazität äquivalent ist, ein Viertel der Wellenlänge betragen.

Wir wollen uns nun die Leitung auch auf der Seite der negativen x begrenzt denken, und zwar wollen wir an diesem Ende einen Spannungsknoten der stehenden Schwingung annehmen. Ein solcher ist, wie erwähnt, durch Einschaltung eines Kondensators von sehr großer Kapazität zu erzielen. Bei Leitungen, die aus zwei Paralleldrähten bestehen, stellt man am Ende der Leitung nahezu einen Spannungsknoten her, indem man die Drähte dort leitend überbrückt. Bei dieser letzteren Anordnung werden die Belegungen des bei $x = 0$ befindlichen Kondensators durch

den aus den Paralleldrähten und der Brücke bestehenden Schließungskreis leitend verbunden. Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit die in einem solchen Kreise möglichen stehenden Schwingungen durch (224), (224a) dargestellt werden?

Wir denken uns den Spannungsknoten bei $x = -l$ gelegen, während an dem anderen Ende, bei $x = 0$, der Kondensator von der Kapazität K_0 eingeschaltet ist. Wie oben gezeigt, kann man sich die Kapazität K_0 beseitigt und dafür die Leitung um die Strecke (224b) verlängert denken; dann würden an den Enden ein Spannungsknoten bzw. Spannungsbauch liegen, so daß die Länge der gedachten Leitung gleich einem ungeradzahligen Vielfachen der Viertelwellenlänge sein muß:

$$l + \frac{\gamma\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{4}(2m+1).$$ Hieraus folgt

$$\frac{\nu l}{w} + \gamma = \frac{\pi}{2} + m\pi, \tag{225}$$

wo m eine ganze Zahl ist. In der Tat verschwindet unter dieser Bedingung die durch (224) gegebene Spannung bei $x = -l$.

Ist die Länge l der Paralleldrähte gegeben, gerechnet vom Spannungsknoten bis zur Endkapazität K_0, so ergibt (225) in Verbindung mit (223d) die Frequenzen ν der möglichen Eigenschwingungen. Diese sind bestimmt durch die transzendente Gleichung

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\nu l}{w}\right) = \frac{\nu}{w}\frac{K_0}{K}. \tag{225a}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{\nu l}{w} = \frac{2\pi l}{\lambda} = \xi \tag{225b}$$ und ferner

$$\alpha = \frac{Kl}{K_0}. \tag{225c}$$ Dann wird (225a)

$$\xi \operatorname{tg} \xi = \alpha. \tag{225d}$$

Diese transzendente Gleichung bestimmt die Wellenlängen der Eigenschwingungen einer aus zwei parallelen Drähten bestehenden Leitung, die am einen Ende überbrückt, am anderen an einen Kondensator angeschlossen ist. Dabei ist α das Verhältnis der Kapazität Kl der Paralleldrähte zur Kapazität K_0 des Kondensators.

Ist α sehr klein, d. h. kommt die Kapazität der Leitung nicht gegen die Kapazität des Kondensators in Betracht, so ergibt (225 d)

$$\xi = \sqrt{\alpha}$$

als kleinste Wurzel. Setzt man hier, nach (225 b), (216 f)

$$\xi = \frac{2\pi l}{w\tau} = \frac{2\pi l \sqrt{LK}}{c\tau}, \qquad \text{so wird}$$

$$\frac{2\pi\sqrt{lL}}{c\tau} = \sqrt{\frac{1}{K_0}} \qquad \text{oder}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{c}\sqrt{lLK_0}. \tag{225e}$$

Wir erhalten also, wenn wir die Kapazität des Schließungskreises vernachlässigen, für die Grundschwingung die Thomsonsche Formel (201 i); denn lL ist hier die Selbstinduktion der Paralleldrähte, da ja L die auf die Längeneinheit berechnete Selbstinduktion bedeutet.

Die Formel (225 d) stellt nun die Verallgemeinerung der Thomsonschen Formel dar, die sich durch Berücksichtigung der Kapazität des Schließungskreises ergibt. Neben der Grundschwingung läßt sie eine Reihe von Oberschwingungen als möglich voraussehen.

Jene Formel wurde zuerst von G. Kirchhoff aus der Fernwirkungstheorie abgeleitet, und zwar für beliebige Form des Schließungsbogens. Wir haben uns bei ihrer Ableitung aus der Maxwellschen Theorie auf eine besondere Anordnung beschränkt, nämlich auf den Fall, daß der Schließungskreis aus zwei Paralleldrähten und einer kurzen Brücke besteht. Für diese Anordnung hat der Begriff der Leitungskapazität eine ganz bestimmte Bedeutung (vgl. § 72). Für beliebige Form des Schließungskreises jedoch und für Abmessungen desselben, die nicht klein gegen die Wellenlänge sind, schweben die Begriffe „Kapazität“ und „Selbstinduktion“ der Leitung ganz in der Luft. Das hängt damit zusammen, daß im allgemeinen von einem solchen Schließungskreise Wellen in den Raum hinausgesandt werden, und daß die elektromagnetische Energie der Schwingung nicht auf die unmittelbare Nachbarschaft des Leitungskreises zusammengedrängt

ist. Der Einwand, der am Schlusse des § 67 gegen die auf der Annahme quasistationären Stromes fußende Thomsonsche Theorie der Kondensatorentladung erhoben wurde, ist auch gegen die Kirchhoffsche Verallgemeinerung geltend zu machen, da auch diese auf die ausgesandte Strahlung keine Rücksicht nimmt. Allein gerade der hier behandelte Fall zweier paralleler Drähte, die jeweils von entgegengesetzt gleichen Strömen in gegenüberliegenden Querschnitten durchflossen werden, ist diesem Einwande nicht ausgesetzt. Hier hat die magnetische Energie in der unmittelbaren Umgebung der Leitung ihren Sitz; die Strahlung ist, wie wir in § 80 sehen werden, zu vernachlässigen.

§ 76. Der Poyntingsche Vektor.

Die Maxwellsche Theorie legt, indem sie die elektromagnetische Energie über das Feld verteilt denkt, die Vorstellung nahe, daß die Energie nicht sprungweise von einem Körper zu einem anderen von ihm getrennten Körper übertragen werden kann, sondern daß sie allmählich von Ort zu Ort wandert. Wie nun aus dem Gesetze der Erhaltung der Masse folgt, daß die Zunahme der gesamten Masse in einem Gebiete gleich der durch die Begrenzungsfläche in das Innere tretenden Strömung ist, so muß sich nach dem Gesetze von der Erhaltung der Energie die Zunahme der gesamten Energie des umschlossenen Feldes als Energieströmung durch die Begrenzungsfläche darstellen lassen.

Eine dieser Auffassung entsprechende Theorie der Energieströmung im elektromagnetischen Felde ist von Poynting entwickelt worden. Bei ihrer Darlegung knüpfen wir an die Gleichung (180d) des § 60 an, die unmittelbar aus den Feldgleichungen für ruhende, nicht ferromagnetische Körper folgte:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{c}{4\pi}\int df[\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e, \mathfrak{H}]_n + \int dv(\mathfrak{E}^e, \mathfrak{c}) - Q. \tag{226}$$

Dabei ist f die Oberfläche des Raumes v, der von beliebigen Leitern oder Isolatoren eingenommen ist, n ihre äußere Normale. Das zweite Glied der rechten Seite stellt, wenn die erste der in § 60 gegebenen Deutungen zutrifft, die Arbeit dar, welche von

den in diesen Körpern wirkenden eingeprägten Kräften $\mathfrak{E}^e$ geleistet wird; das dritte Glied bringt von dieser Arbeit die Joulesche Wärme Q in Abzug. Haben wir es mit einem abgeschlossenen elektromagnetischen Systeme zu tun, bei dem das erste Glied der rechten Seite verschwindet, so ist der Überschuß der geleisteten Arbeit über die entwickelte Wärme gleich der entstandenen elektromagnetischen Energie, wie es das Energieprinzip verlangt. Dies ist auch nach der zweiten, in § 60 erörterten Auffassung der Fall, nur daß an Stelle des Ausdruckes (180g) für die Arbeit der eingeprägten Kräfte der Ausdruck (180h) tritt, und an Stelle des Ausdruckes (180a) für die elektrische Energie der Ausdruck (180i); nur in solchen Körpern, wo eingeprägte Kräfte und Verschiebungsströme gleichzeitig vorhanden sind, kommen die Unterschiede der beiden Auffassungen in Frage.

Jetzt handelt es sich darum, wie für ein nichtabgeschlossenes, ruhendes elektromagnetisches System das Energiegesetz auszusprechen ist. Ist auf der Fläche f, welche das betrachtete Gebiet einschließt, ein elektromagnetisches Feld vorhanden, so tritt ein (positiver oder negativer) Energiezuwachs ein, welcher durch das erste Glied der rechten Seite von (226) dargestellt wird. Dieser Energiezuwachs wird der gesamten Energieströmung gleichzusetzen sein, welche pro Sekunde die geschlossene Fläche f von außen nach innen durchströmt. Setzen wir nun mit Poynting den Energiestrom pro Sekunde und Flächeneinheit gleich der zum Flächenstück senkrecht genommenen Komponente des Vektors

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e, \mathfrak{H}], \tag{227}$$

so führt die Integration über die geschlossene Fläche f stets zu dem richtigen Werte des gesamten, durch die Fläche tretenden Energieflusses. Es wird der Überschuß der Arbeit der eingeprägten Kräfte über die Summe aus der Energiezunahme des umschlossenen Gebietes und der in diesem Gebiete entwickelten Jouleschen Wärme gleich dem gesamten, durch die Begrenzungsfläche f nach außen tretenden Energiestrom

$$\frac{dA}{dt} - \frac{dW}{dt} - Q = \int df \mathfrak{S}_n . \tag{227a}$$

Die zweite der oben erwähnten Auffassungen läßt die Differenz von Arbeit der eingeprägten Kräfte und Energiezunahme ungeändert. Auch für sie ist (227) eine Folge der Feldgleichungen.

Allerdings ist die durch den Poyntingschen Vektor (227) gegebene Verteilung des Energiestromes nicht die einzig mögliche; man könnte vielmehr stets eine quellenfreie Strömung hinzufügen, da eine solche durch jede geschlossene Fläche den Gesamtstrom Null ergeben, daher in (227a) herausfallen würde. Dennoch werden wir den Poyntingschen Ausdruck der Energieströmung als allgemein gültig ansehen; waren wir doch bereits in § 68 bei der Behandlung ebener, homogener elektromagnetischer Wellen in Isolatoren zu einem Ausdrucke gelangt (205g), der aus (227) hervorgeht, wenn eingeprägte elektrische Kräfte fehlen. Wir hatten gezeigt, daß die Richtung dieses Vektors, im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie gesprochen, dem Lichtstrahl entspricht, und daß seine Komponente nach irgendeiner Richtung der Strahlung gleich ist, die pro Sekunde von der Flächeneinheit einer senkrecht zu dieser Richtung gestellten Fläche aufgefangen wird. Wir werden aus diesem Grunde den Poyntingschen Vektor $\mathfrak{S}$ gelegentlich auch als „Strahlvektor" bezeichnen. Denken wir uns das Innere der Fläche f von Lichtwellen erfüllt und die Fläche selbst durch eine innen berußte Wand verwirklicht, die alle auffallende Strahlung absorbiert, so würde die Normalkomponente von $\mathfrak{S}$ die pro Sekunde in der Flächeneinheit der berußten (schwarzen) Fläche entwickelte Wärme darstellen. Hier gewinnt also der Poyntingsche Energiestrom eine unmittelbare physikalische Bedeutung. In einem beliebigen elektromagnetischen Felde trifft das nicht immer zu. Bisweilen ergibt der Poyntingsche Vektor $\mathfrak{S}$ Energieströme in geschlossenen Bahnen, die durch nichts ihr Dasein verraten. Ein Beispiel hierfür ist ein System, das aus einem isolierten geladenen Leiter und einem Magneten besteht. Im Luftraume ergibt hier (227) einen dauernden Energiestrom senkrecht zu den elektrischen und zu den magnetischen Kraftlinien. Die Energie jedes einzelnen Raumteiles aber bleibt konstant, so daß Quell- oder Senkpunkte der Energieströmung nicht auftreten.

Jedenfalls gibt die Integration von $\mathfrak{S}_n$ über eine geschlossene Fläche immer richtig die dem Inneren der Fläche entströmte Energie, d. h. die Gesamtstrahlung an. Auch dürfte es keinen anderen Ausdruck des Energiestromes geben, der dasselbe für ein beliebiges elektromagnetisches Feld in ebenso einfacher Weise leistet. Denn die Nahewirkungstheorie muß von einem solchen Ausdrucke verlangen, daß er den Energiestrom nur von den elektrischen und magnetischen Vektoren abhängig macht, die an der betreffenden Stelle gerade herrschen. Wir werden den Poyntingschen Vektor daher allgemein als Maß des elektromagnetischen Energiestromes verwenden. Es wird nützlich sein, den Sinn der Poyntingschen Theorie an einigen Beispielen zu erläutern.

§ 77. Der Energiestrom in der Umgebung eines elektrischen Stromes.

Daß ein elektrischer Strom Energie seiner Längsrichtung nach überträgt, ist gerade das, was wir von dem elektrischen Strome am genauesten und sichersten wissen. Fraglich ist nur, wie sich dieser Energiestrom im einzelnen verteilt, vor allem, ob die Fortleitung der Hauptsache nach in dem Metall oder in dem umgebenden Dielektrikum erfolgt. Früher galt es als selbstverständlich, daß die Energie denselben Weg verfolge wie der elektrische Strom selbst, daß er also durch die Metallmasse hindurchgehe. Die Maxwellsche Theorie lehrt jedoch, daß der Sitz der elektromagnetischen Energie das umgebende Dielektrikum ist. Die Poyntingsche Theorie führt diese Vorstellung weiter aus, indem sie das Dielektrikum als Energieleiter betrachtet. Bei der Behandlung der elektrischen Drahtwellen (§ 72) fanden wir in der Tat, daß das elektromagnetische Feld in die Leitungsdrähte nicht eindringt, daß die Energie sich im Dielektrikum längs der Drähte fortpflanzt. Dabei hatten wir allerdings auf den Widerstand der Drähte keine Rücksicht genommen; würden wir ihn einführen, so würde sich ergeben, daß in den Leitungsdrähten Joulesche Wärme entwickelt wird, daß ein entsprechender Teil der Energie den Wellen entzogen wird, und daß hierdurch eine Dämpfung und eine geringfügige Verzögerung der Wellen be-

dingt wird. Hiervon abgesehen, hat man es mit einem nur im Dielektrikum sich abspielenden Vorgange zu tun.

Man hat den Energiestrom durchaus von dem elektrischen Strome zu trennen. Der elektrische Strom kann nur in den Kupferdrähten fließen, nur auf diesen können elektrische Ladungen sich ansammeln. Daher müssen die magnetischen Kraftlinien die Drähte umschlingen, die elektrischen Kraftlinien auf den Drähten entspringen und endigen. So bilden die Drähte hier den Kern des elektromagnetischen Feldes und leiten in diesem Sinne nicht nur die Elektrizität, sondern auch die Energie; sie geben nämlich dem Energiestrome die Richtung. Dennoch sind im allgemeinen nicht die Metalle, sondern die Dielektrika als Leiter des Energiestromes zu bezeichnen. Denn wir wissen, daß die elektrischen Wellen durch Metallplatten nicht hindurchdringen, daß sie aber in Isolatoren sich fortpflanzen können. Die Metalle sind demnach Nichtleiter des Energiestromes, aber Leiter der Elektrizität. Die Dielektrika sind Leiter des Energiestromes, aber Nichtleiter der Elektrizität.

Wir betrachten einen Stromring, in welchem von eingeprägten Kräften $\mathfrak{E}^e$ ein stationärer Strom unterhalten wird. Die gesamte, für den Strom maßgebende elektrische Feldstärke ist hier nach Gleichung (161)

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^s + \mathfrak{E}^e.$$

Nach (227) ist jedoch für den Energiestrom die elektrostatische Feldstärke maßgebend: $\mathfrak{E}^s = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e$.

Wir betrachten ein Stück unseres linearen Leiters und berechnen die Energie, die in den Leiter aus dem Dielektrikum eintritt. Die magnetischen Kraftlinien umschlingen den Leiter; das Linienintegral der magnetischen Feldstärke ist nach der ersten Hauptgleichung für alle Querschnitte gleich $\frac{4\pi J}{c}$. Für die ins Innere des Drahtes tretende Energie ist nur die zur Drahtachse parallele Komponente der elektrostatischen Feldstärke maßgebend; die gleich dem Potentialgefälle $-\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ längs des Drahtes ist. Die

Energie, die nach dem Poyntingschen Satze in das Stück ds des Drahtes tritt, ist daher

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial s} J ds;$$

die Integration längs der Leitlinie des Drahtes ergibt

$$J(\varphi_1 - \varphi_2)$$

für die in ein Drahtstück pro Sekunde eintretende Energie. Ist dieses Drahtstück thermisch und chemisch homogen, also von eingeprägten Kräften frei, so stellt nach (153) das Produkt aus Stromstärke und Potentialdifferenz die entwickelte Joulesche Wärme Q dar. Ist aber das Stück die Trennungsschicht zweier Leiter, d. h. der Sitz der eingeprägten Kontaktkraft, so wird nach (161 b) die einströmende Energie

$$J(\varphi_1 - \varphi_2) = -JE_{12}.$$

Fließt also der Strom im Sinne der Kontaktkraft E_{12}, so strömt hier nicht Energie ein, sondern aus. Es strömt demnach überall dort, wo die den elektrischen Strom unterhaltenden elektromotorischen Kräfte ihren Sitz haben, Energie in das Feld hinaus; längs des ganzen Drahtes strömt andererseits Energie aus dem Felde in den Draht ein, um dort in Joulesche Wärme verwandelt zu werden. Bei räumlich verteilten elektromotorischen Kräften überlagern sich diese beiden Energieströme. Die in den ganzen Leitungskreis in Summa eintretende Energie ist gleich Null; denn das elektrostatische Potential ist einwertig, es verschwindet also $\varphi_1 - \varphi_2$, wenn Anfangs- und Endpunkt des Drahtstückes zusammenfallen. Die gesamte Arbeit der eingeprägten Kräfte wird in Joulesche Wärme verwandelt, wie es für den stationären Strom das Energieprinzip verlangt.

Übrigens ist das elektrostatische Feld $\mathfrak{E}^s$ durchweg wirbelfrei; es besitzt keinen Flächenwirbel an der Drahtoberfläche, d. h. seine tangentiellen Komponenten sind stetig. Auch $\mathfrak{H}$ ist in seinen tangentiellen Komponenten stetig, da von räumlich verteiltem elektrischen Strome die Rede ist. Folglich setzt sich die normale Komponente der Energieströmung stetig in das Drahtinnere hinein fort. Die tangentielle Komponente der Energie-

strömung aber kann einen Sprung machen. Im Drahtinnern geht in der Tat der Energiestrom im wesentlichen in radialer Richtung vor sich; im Dielektrikum hingegen, wo das von den freien Ladungen des Drahtes herrührende Feld $\mathfrak{E}^s$ nahezu radial gerichtet ist, kommt ein dem Drahte paralleler Energiestrom hinzu, der weitaus den vorhin betrachteten, zur Drahtoberfläche normalen Energiestrom überwiegt. *Dieser Hauptstrom der Energie geht längs des Drahtes im Dielektrikum vor sich.* Auf diesem Wege wird die Energie z. B. von der Kraftstation eines Elektrizitätswerkes aus den Abnehmern zugeführt. In einer geschlossenen Leitung indessen macht sich dieser Energiestrom längs des Drahtes nicht bemerkbar, wenigstens nicht bei stationärem Strome, wo er in geschlossenen Bahnen verläuft.

Der Energiestrom längs des Drahtes kommt zur Geltung bei nichtstationärem Strome, etwa bei den Schwingungen einer Kondensatorentladung (vgl. § 67). Hier kann die Potentialdifferenz der Kondensatorplatten die eingeprägte Kraft der obigen Betrachtung ersetzen. Nimmt nun die elektrische Energie des Kondensators gerade ab, so tritt ein radialer Energiestrom vom Kondensator aus in das Feld; derselbe wird sodann längs des Drahtes nach denjenigen Stellen des Feldes hingeführt, in denen die magnetische Energie gerade zunimmt. Ein Bruchteil strömt unterwegs in den Draht, um dort in Joulesche Wärme verwandelt zu werden.

Diese Darstellung der Energieübertragung, welche der Poyntingschen Auffassung entspricht, ist demnach eine sinngemäße Ergänzung der Annahmen über die Energieverteilung, welche der Nahewirkungstheorie eigentümlich sind. Bei elektrischen Schwingungen bewährt sie sich; auch schließt sie sich an den in der Optik so nützlichen Begriff des Strahles an.

In diesem Bande ist unter der gesamten „elektrischen Feldstärke“ $\mathfrak{E}$ stets der Vektor verstanden, dem die elektrische Stromdichte $\mathfrak{i}$ proportional ist (Gl. 161). Für den Energiestrom ist, falls eingeprägte Kräfte wirken, nicht jener Vektor, sondern $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e$ maßgebend. Dieser Vektor hat die Eigenschaft, daß seine

tangentiellen Komponenten sich an der Grenzfläche zweier Körper stetig verhalten; sonst würde nämlich eine flächenhafte Anhäufung der Energie eintreten, die mit den Grundvorstellungen der Maxwellschen Theorie nicht vereinbar ist. H. Hertz dagegen bezeichnet in seinen Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik als „elektrische Kraft" den für den Energiestrom maßgebenden Vektor; er muß dann die Beziehung zwischen Stromdichte und elektrischer Kraft überall dort abändern, wo eingeprägte Kräfte auftreten. Die „elektrische Kraft" in Hertzscher Bezeichnung fällt also mit unserem Vektor $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e$ zusammen, der im statischen oder stationären Felde die „elektrostatische Kraft" darstellte.

§ 78. Der komplexe Poyntingsche Vektor.

In diesem Paragraphen sollen eingeprägte elektrische Kräfte nicht angenommen werden, so daß der Poyntingsche Vektor (227) wird:

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]. \tag{228}$$

In dem Ausdrucke (226a) verschwindet dann das Glied, welches die Arbeitsleistung der eingeprägten Kräfte darstellt. Kehrt man die Normalenrichtung um, versteht also, was im folgenden sich als zweckmäßiger erweisen wird, unter n die nach dem Inneren der Begrenzungsfläche f weisende Normale, so wird

$$\int df\,\mathfrak{S}_n = Q + \frac{dW}{dt}; \tag{228a}$$

d. h. der durch die Fläche f nach innen tretende Energiestrom ist gleich der Summe aus Joulescher Wärme und Energiezunahme des umschlossenen Feldes.

Wir wollen in diesem Paragraphen einen periodischen Schwingungszustand des Feldes betrachten und Mittelwerte über die Zeit (τ) einer ganzen Schwingung bilden, die wir durch einen horizontalen Strich über der betreffenden Größe kennzeichnen. Da offenbar in einem Schwingungsfelde wegen der periodischen Art der Feldgrößen gilt:

$$\overline{\frac{dW}{dt}} = \frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau} \frac{dW}{dt}\,dt = \frac{1}{\tau}\,\{W(t+\tau) - W(t)\} = 0,$$

so fällt aus (228a) bei der Mittelwertsbildung das Glied, welches die Energiezunahme enthält, heraus, und es wird

$$\int dt\,\overline{\mathfrak{S}}_n = \overline{Q}; \tag{229}$$

d. h. der Mittelwert des gesamten, in das Innere tretenden Energiestromes ist gleich dem Mittelwert der Jouleschen Wärme.

In der Theorie der Wirbelströme — d. h. der Ströme, die ein periodisches Magnetfeld im Innern eines Leiters erzeugt —, und bei vielen anderen Problemen kommt es hauptsächlich auf die Berechnung des Mittelwertes der entstehenden Jouleschen Wärme an. Anstatt nun, wie es am nächsten läge, eine Integration des skalaren Produktes aus Stromdichte $\mathfrak{i}$ und Feldstärke $\mathfrak{E}$ über den vom Leiter eingenommenen Raum vorzunehmen, kann man, auf Grund der soeben aus dem Poyntingschen Satze abgebildeten Formel, sich mit einer Integration über die Oberfläche des Leiters begnügen, was eine Ersparnis an Rechenarbeit bedeutet.

Wir wenden die Formel (229) auf die in § 68 behandelten Wellen in Halbleitern an. Von der als (yz)-Ebene gewählten Begrenzungsebene des Leiters tritt eine elektromagnetische Welle in das Innere, deren Feldstärken nach (207), (208) gegeben sind als reelle Teile von

$$\mathfrak{E}_y = a \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)}, \qquad \mathfrak{H}_z = b \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)}. \tag{230}$$

Dabei sind die komplexen Konstanten a und b nicht unabhängig voneinander, sondern verknüpft durch (208a):

$$\frac{b}{a} = \frac{p}{\mu} = \frac{n - i\varkappa}{\mu}. \tag{230a}$$

Wir errichten nun über einem Stücke der Begrenzungsebene, vom Flächeninhalt eines Quadratzentimeters, einen Zylinder und fragen nach der mittleren Jouleschen Wärme, welche in der Sekunde in diesem Zylinder entsteht. Die Höhe des Zylinders nehmen wir als so groß an, daß auf der gegenüberliegenden Grund-

fläche die infolge der Wärmeentwicklung gedämpften Wellen praktisch erloschen sind. Dann ist der Energiestrom durch jene Grundfläche gleich Null. Ferner hat an der Mantelfläche des Zylinders der Energiestrom, der überall der x-Achse parallel ist, keine normale Komponente. Es kommt also allein der Energiestrom durch die (yz)-Ebene in Betracht; sein Mittelwert

$$\overline{\mathfrak{S}}_x = \overline{Q} \tag{231}$$

ergibt die mittlere Wärmeentwicklung im ganzen Zylinder.

Für $x = 0$ ergibt (230):

$$\mathfrak{E}_y = a \cdot e^{i\nu t}, \qquad \mathfrak{H}_z = b \cdot e^{i\nu t}.$$

Nun darf man, um gemäß (228) den Poyntingschen Vektor zu bestimmen, selbstverständlich nicht ohne weiteres das Produkt dieser beiden komplexen Ausdrücke bilden. Man hat vielmehr, indem man setzt: $a = |a|\, e^{i\alpha}, \quad b = |b|\, e^{i\beta},$

die reellen Teile abzuspalten:

$$Re(\mathfrak{E}_y) = |a| \cos(\nu t + \alpha), \qquad Re(\mathfrak{H}_z) = |b| \cos(\nu t + \beta),$$

und erhält so

$$\mathfrak{S}_x = \frac{c}{4\pi} \cdot Re(\mathfrak{E}_y) \cdot Re(\mathfrak{H}_z) = \frac{c}{4\pi} \cdot |a| \cdot |b| \cdot \cos(\nu t + \alpha) \cdot \cos(\nu t + \beta),$$

und folglich als Mittelwert über die Zeit einer ganzen Schwingung

$$\overline{\mathfrak{S}}_x = \frac{c}{8\pi} \cdot |a| \cdot |b| \cos(\alpha - \beta).$$

Da nun nach (230a) gilt

$$\frac{b}{a} = \frac{|b|}{|a|} \cdot e^{i(\alpha - \beta)} = \frac{n - i\varkappa}{\mu}, \qquad \text{so folgt}$$

$$|b| \cos(\alpha - \beta) = |a| \cdot \frac{n}{\mu},$$

und demnach ergibt

$$\overline{\mathfrak{S}}_x = \frac{c}{8\pi} \cdot |a|^2 \frac{n}{\mu} \tag{231a}$$

den mittleren Energiestrom durch die Grundfläche des Zylinders und daher nach (231) die mittlere Wärmeentwicklung im Zylinder.

Wer mit der rechnerischen Behandlung der komplexen Größen bei Schwingungsaufgaben vertraut ist, weiß, wie man dieses etwas umständliche Verfahren vereinfachen kann. Wenn es sich nur um

die Berechnung des zeitlichen Mittelwertes handelt, kann man statt $\mathfrak{H}_z$ die zu ihr konjugierte komplexe Größe einführen:

$\mathfrak{H}_z^* = b^* \cdot e^{-i\nu t}$, wobei nach (230 a) gilt

$b^* = a^* \cdot \frac{n + i\varkappa}{\mu}$. Man setze sodann

$$\mathfrak{S}_x = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} Re\{\mathfrak{E}_y \cdot \mathfrak{H}_z^*\} = \frac{c}{8\pi} Re\{ab^*\}. \tag{232}$$

Dies ergibt wiederum

$$\overline{\mathfrak{S}}_x = \frac{c}{8\pi} Re\left\{aa^*\left(\frac{n + i\varkappa}{\mu}\right)\right\} = \frac{c}{8\pi} |a|^2 \cdot \frac{n}{\mu}, \tag{232a}$$

in Übereinstimmung mit (231 a).

Da nun bei Aufgaben, die sich auf das Feld von Wechselströmen beziehen, die Lösung meist von vornherein sich in komklexer Form darstellt, so liegt die Frage nahe: Läßt sich das zuletzt angewandte Verfahren verallgemeinern, und hat auch der imaginäre Teil des „komplexen Poyntingschen Vektors“

$$\mathfrak{U} = \frac{c}{8\pi} [\mathfrak{E}\mathfrak{H}^*] \tag{233}$$

eine physikalische Bedeutung?

Um dieses zu untersuchen, gehen wir aus von den Feldgleichungen für Halbleiter (206 a, b); sie lauten, da die Abhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ von der Zeit durch den komplexen Faktor $e^{i\nu t}$ dargestellt wird:

$$\text{curl}\, \mathfrak{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E} + \frac{i\nu\varepsilon}{c} \mathfrak{E},$$

$$\text{curl}\, \mathfrak{E} = -\frac{i\nu\mu}{c} \mathfrak{H}. \tag{233a}$$

$\mathfrak{H}^*$, der zu $\mathfrak{H}$ konjugierte komplexe Vektor, muß demnach der Differentialgleichung genügen

$$\text{curl}\, \mathfrak{H}^* = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}^* - i\frac{\nu\varepsilon}{c} \mathfrak{E}^*. \tag{233b}$$

Man multipliziere nun (233 b) mit $\mathfrak{E}$, (233 a) mit $\mathfrak{H}^*$, und subtrahiere; dann folgt

$$\mathfrak{E}\,\text{curl}\, \mathfrak{H}^* - \mathfrak{H}^*\,\text{curl}\, \mathfrak{E} = \frac{4\pi\sigma}{c} (\mathfrak{E}\mathfrak{E}^*) + \frac{i\nu}{c}\{\mu(\mathfrak{H}\mathfrak{H}^*) - \varepsilon(\mathfrak{E}\mathfrak{E}^*)\}$$

oder, gemäß Regel (102),

$$-\text{div}\, [\mathfrak{E}\mathfrak{H}^*] = \frac{4\pi\sigma}{c} |\mathfrak{E}^2| + \frac{i\nu}{c}\{\mu|\mathfrak{H}^2| - \varepsilon|\mathfrak{E}^2|\},$$

und schließlich, unter Einführung des komplexen Vektors $\mathfrak{U}$ (233),

$$(233c) \qquad -\operatorname{div}\mathfrak{U} = \frac{1}{2}\sigma|\mathfrak{E}^2| + i\nu\left\{\frac{\mu}{8\pi}|\mathfrak{H}^2| - \frac{\varepsilon}{8\pi}|\mathfrak{E}^2|\right\}.$$

Wir integrieren nun über ein räumliches Gebiet, wobei die linke Seite nach dem Gaußschen Satze sich in ein über dessen Oberfläche erstrecktes Integral umwandelt. Beachtet man, daß $\frac{1}{2}|\mathfrak{E}^2|$ und $\frac{1}{2}|\mathfrak{H}^2|$ die zeitlichen Mittelwerte der Quadrate der Feldstärken sind, so folgt (n ist die innere Normale der Fläche f):

$$(234) \qquad \int df\,\mathfrak{U}_n = \bar{Q} + i\cdot 2\nu\{\bar{T} - \bar{U}\}.$$

Es ist also für ein Wechselfeld der reelle Teil des Oberflächenintegrals des „komplexen Poyntingschen Vektors“ $\mathfrak{U}$ gleich der mittleren Jouleschen Wärme; der imaginäre Teil hingegen ist gleich der Differenz der Mittelwerte der magnetischen und der elektrischen Energie des umschlossenen Gebietes, multipliziert mit der doppelten Schwingungsfrequenz. — Die Spaltung der komplexen Formel (234) in reellen und imaginären Teil würde einerseits zum Poyntingschen Satze in der Form (229) zurückführen, andererseits zu einem vom Verfasser gelegentlich aufgestellten Satze. Die obige übersichtliche Zusammenfassung unter Verwendung eines einzigen komplexen Vektors rührt von F. Emde her. Der Satz (234) gilt ebenso wie der Poyntingsche für ein Gebiet, welches beliebige Körper enthält; auch Unstetigkeitsflächen sind nicht auszuschließen, da die Normalkomponente des Vektors $\mathfrak{U}$, wegen der zu fordernden Stetigkeit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}^*$, sie stetig durchsetzt.

In dem obigen Falle, wo eine ebene Welle senkrecht in einen Halbleiter eintritt, ist

$$(235) \qquad \mathfrak{U}_x = \frac{c}{8\pi}\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z^* = \frac{c}{8\pi}ab^* = \frac{c}{8\pi}aa^*\frac{n+i\varkappa}{\mu},$$

es folgt also aus (234) einerseits als reeller Teil in Übereinstimmung mit (232a)

$$(235a) \qquad \bar{Q} = \frac{c}{8\pi}|a|^2\cdot\frac{n}{\mu},$$

und andererseits

$$\overline{T} - \overline{U} = \frac{c}{16\pi\nu} |a|^2 \cdot \frac{\varkappa}{\mu}, \tag{235b}$$

wobei $|a|$ die Amplitüde der elektrischen Feldstärke an der Grenzebene des Halbleiters bezeichnet.

Für Metalle kann man (§ 70) die Dielektrizitätskonstante und dementsprechend die elektrische Energie gleich Null setzen. Dann ergibt (234)

$$\int df\,\mathfrak{U}_n = \overline{Q} + i \cdot 2\nu\overline{T}. \tag{236}$$

Es ist so die Bestimmung der mittleren Jouleschen Wärme und der mittleren magnetischen Energie in Metallen auf eine Integration über die Oberfläche zurückgeführt.

In dem obigen Beispiel ist nach (210a) für alle Metalle zu setzen

$$n = \varkappa = \sqrt{\mu\sigma\tau},$$

somit ergeben (235a, b):

$$\overline{Q} = \frac{c}{8\pi} \cdot |a|^2 \cdot \sqrt{\frac{\sigma\tau}{\mu}}, \tag{236a}$$

$$\overline{T} = \frac{c\tau}{32\pi^2} |a|^2 \cdot \sqrt{\frac{\sigma\tau}{\mu}}, \tag{236b}$$

Führt man statt der Amplitüde $|a|$ der elektrischen Feldstärke die Amplitüde $|b|$ der magnetischen ein, gemäß (230a):

$$|b|^2 = |a|^2 \cdot \frac{n^2 + \varkappa^2}{\mu^2} = |a|^2 \cdot \frac{2\sigma\tau}{\mu},$$ so wird

$$\overline{Q} = \frac{c}{16\pi} |b|^2 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\sigma\tau}}, \tag{236c}$$

$$\overline{T} = \frac{c}{64\pi^2} |b|^2 \cdot \sqrt{\frac{\mu\tau}{\sigma}}. \tag{236d}$$

Dieses sind also bei Wellen, die von der Grenzebene aus senkrecht in das Innere des Metalles treten, die Mittelwerte der Jouleschen Wärme und der magnetischen Energie in einem über der Flächeneinheit der Grenzebene errichteten Zylinder.

Wir wollen die Bedeutung der Beziehung (236) noch an einem anderen Beispiel erläutern. Man denke sich einen geraden Leitungsdraht von kreisförmigem Querschnitt in der Längsrichtung von Wechselstrom durchflossen. Die elektrische Feldstärke

wird dann der Drahtachse parallel sein, in deren Richtung wir die y-Achse legen. Zwischen den komplexen Ausdrücken für die tangentielle Feldstärke $\mathfrak{E}_y$ an der Drahtoberfläche und der gesamten Stromstärke J wird eine Beziehung bestehen von der Form:

$$\mathfrak{E}_y = (r + si)J, \tag{237}$$

wobei r und s reelle Konstanten darstellen.

Welche Bedeutung haben nun diese beiden Konstanten? Um dies festzustellen, wenden wir auf die Längeneinheit des Drahtes die Formel (236) an; da der komplexe Poyntingsche Vektor $\mathfrak{U}$ senkrecht zur Drahtachse gerichtet ist, so liefert zur linken Seite nur die Mantelfläche des zylindrischen Drahtstückes einen Beitrag, und zwar

$$\int df\,\mathfrak{U}_n = \oint ds \frac{c}{8\pi} \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_s^* = \frac{c}{8\pi} \mathfrak{E}_y \oint ds\,\mathfrak{H}_s^*;$$

hier bedeutet s die Umfangslinie des Drahtquerschnittes, längs deren aus Symmetriegründen $\mathfrak{E}_y$ konstant ist. Nun besteht zwischen dem Linienintegral von $\mathfrak{H}^*$ und der zu J konjugiert komplexen Größe J^* die Beziehung

$$\oint ds\,\mathfrak{H}_s^* = \frac{4\pi}{c} \cdot J^*.$$

Infolgedessen wird $\quad \int df\,\mathfrak{U}_n = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_y J^*, \quad$ und nach (237)

$$\int df\,\mathfrak{U}_n = (r + si) \cdot \frac{1}{2} JJ^* = (r + si) \frac{1}{2} |J|^2.$$

Der Vergleich mit (236) ergibt

$$\overline{Q} = r \cdot \frac{1}{2} |J|^2, \tag{237a}$$

$$\overline{T}_i = \frac{s}{2\nu} \cdot \frac{1}{2} |J|^2. \tag{237b}$$

Dies sind die Joulesche Wärme und die magnetische Energie des Drahtinnern, bezogen auf dessen Längeneinheit. Es hat also, da $\frac{1}{2}|J|^2$ den Mittelwert des Quadrates der Stromstärke angibt, r die Bedeutung des Widerstandes pro Längeneinheit; s hängt

mit der „inneren Selbstinduktion (l_i) pro Längeneinheit des Drahtes“, die wir durch

$$\overline{T}_i = \frac{1}{2c^2} l_i \cdot \frac{1}{2} |J|^2$$

bestimmen, folgendermaßen zusammen:

(237 c) $$l_i = \frac{sc^2}{\nu}.$$

Wir haben T_i, l_i für die magnetische Energie bzw. für die Selbstinduktion des Drahtinnern geschrieben, weil neben diesen — und zwar meist sie überwiegend — die magnetische Energie des Drahtäußern und die ihr entsprechende äußere Selbstinduktion in Betracht kommen; von diesen ist hier nicht die Rede.

Ist nun, durch Integration der Feldgleichungen für das Drahtinnere, die Beziehung zwischen der Stromstärke und der elektrischen Feldstärke längs des Umfanges des Querschnittes in der komplexen Form (237) erhalten worden, so ergeben sich ohne weiteres Widerstand und innere Selbstinduktion.

Mit wachsender Frequenz des Wechselstromes weicht die Verteilung des Stromes über den Drahtquerschnitt mehr und mehr von der gleichförmigen ab; der Strom drängt sich nach der Oberfläche hin und bildet schließlich nur eine dünne oberflächliche Stromhaut; diese Erscheinung bezeichnet man als „skin (Haut)-Effekt“. Im Sinne der Maxwellschen Theorie ist es, die Erscheinung folgendermaßen zu deuten: Das elektromagnetische Feld dringt vom Dielektrikum her in das Innere des Leiters ein. Bei geringer Schwingungszahl dringt es so weit vor, daß der Strom sich gleichförmig über den Querschnitt verteilt; je größer jedoch die Frequenz ist, desto weniger tief dringt das Feld, und damit der Strom, in das Innere des Leiters ein. So aufgefaßt, tritt der skin-Effekt in enge Beziehung zu dem in § 71 behandelten Eindringen elektromagnetischer Wellen in Metalle.

Hier wie dort sind an der Grenzfläche die elektrische und die magnetische Feldstärke im Metalle tangentiell gerichtet. Zwar war dort die Oberfläche eben, hier dagegen ist sie gekrümmt. Ist indessen der Drahtradius groß gegen die Dicke der Strom-

haut, so wird dieser Umstand keine wesentliche Abweichung bedingen, und es wird das Eindringen der Wellen hier nach demselben Gesetze stattfinden wie dort. Nun wurde in § 71 gezeigt, daß Hertzsche Wellen in Kupfer bis zu einer Tiefe von höchstens einem hundertstel Millimeter eindringen. Somit kommt für einen Draht vom Radius eines Millimeter, bei der Frequenz der Hertzschen Wellen, die Krümmung der Drahtoberfläche nicht wesentlich in Betracht; die Amplitüden und Phasen der elektrischen und magnetischen Feldstärke verhalten sich dann so, wie es in § 69 angegeben wurde; das hier in Betracht kommende Ergebnis ist in den Formeln (230), (230a) enthalten, in denen für Metalle zu setzen ist: $n = \varkappa = \sqrt{\mu\sigma\tau}$. Es gilt also mit genügender Annäherung die Formel:

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{H}_s \frac{a}{b} = \mathfrak{H}_s \frac{\mu}{n - i\varkappa} = \mathfrak{H}_s \frac{\mu(n + i\varkappa)}{n^2 + \varkappa^2} = \mathfrak{H}_s \frac{(1 + i)}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma\tau}}.$$

Ferner ist, wenn ϱ den Drahtradius bezeichnet,

$$\frac{4\pi J}{c} = 2\pi\varrho\mathfrak{H}_s, \qquad \text{also} \qquad \mathfrak{H}_s = \frac{2J}{c\varrho}, \qquad \text{somit}$$

$$\mathfrak{E}_y = \frac{1 + i}{c\varrho} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma\tau}} \cdot J.$$

Nunmehr ergibt sich aus (237) und (237c)

$$\frac{1}{c\varrho} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma\tau}} = r = s = \frac{\nu}{c^2} l_i, \qquad \text{und somit}$$

$$(238) \qquad r = \frac{1}{c\varrho} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma\tau}}, \qquad l_i = \frac{c}{2\pi\varrho} \sqrt{\frac{\mu\tau}{\sigma}},$$

Dieses sind die sogenannten „Rayleighschen Formeln“ für den Widerstand und die innere Selbstinduktion der Längeneinheit eines Drahtes von kreisförmigem Querschnitt bei hochfrequentem Wechselstrom. Es sind Näherungsformeln, die ausreichen, wenn die Dicke der Stromhaut klein gegen den Drahtradius ist; dann sind, wie man sieht, beide Größen dem Drahtradius umgekehrt proportional; mit abnehmender Schwingungsdauer τ nimmt r zu wie $\tau^{-\frac{1}{2}}$, dagegen l_i nimmt ab wie $\tau^{\frac{1}{2}}$, eben infolge der wachsenden Zusammendrängung des Stromes.

§ 79. Die Hertzsche Lösung.

Wir haben früher die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen im Raume behandelt. Nun wird eine elektromagnetische Welle erst in unendlicher Entfernung von der Erregungsstelle als ebene Welle anzusehen sein. Kann die Maxwellsche Theorie auch über die Vorgänge in der Nähe der Erregungsstelle, welche das Entstehen der Welle bedingen, etwas aussagen?

Eine Lösung der Feldgleichungen, welche die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen von einem Erregungspunkte aus darstellt, ist von H. Hertz gefunden worden; wir geben sie hier in vektorieller Form wieder.

Die Feldgleichungen für den an Materie und Elektrizität leeren Raum lauten

$$(239)\quad \begin{cases} \text{a)}\quad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{H}, & \text{b)}\ \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \\ \text{c)}\quad -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{E}, & \text{d)}\ \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \end{cases}$$

Die beiden letzten dieser Gleichungen (c, d) werden erfüllt, wenn man setzt

$$(240)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2}, \\ \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \operatorname{curl} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}. \end{cases}$$

Das elektrische und das magnetische Feld sind hier aus einem einzigen Vektor $\mathfrak{Z}$ abgeleitet, den wir den „Hertzschen Vektor" nennen. Damit auch den beiden ersten der Feldgleichungen (239) Genüge geschehe, muß der Hertzsche Vektor die partielle Differentialgleichung erfüllen:

$$(240\text{a})\quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{Z} = \nabla^2 \mathfrak{Z}.$$

Ein partikuläres Integral derselben ist

$$(241)\quad \mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r};$$

dasselbe ist überall endlich und stetig, außer im Punkte $r = 0$,

der, wie wir sehen werden, die Erregungsstelle ist; r bedeutet die Entfernung von diesem Punkte. Wir wollen uns davon überzeugen, daß (241) der partiellen Differentialgleichung (240a) überall, außer im Erregungspunkte, genügt. Um diesen Nachweis zu führen, zeigen wir zunächst, daß für eine skalare Funktion f des Argumentes $t - \frac{r}{c}$ die Differentialgleichung gilt:

$$\nabla^2 \left\{ \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right\} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right\}.$$

Man hat

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right\} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} f\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{x}{c r^2} f'\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

und ferner

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right\} =$$

$$= \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \left(\frac{3x^2 - r^2}{c r^4}\right) f'\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{x^2}{c^2 r^3} f''\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Indem man nun die Koordinaten zyklisch vertauscht, und zur zweiten Ableitung nach x diejenigen nach y und z hinzufügt, erhält man, mit Rücksicht darauf, daß $1/r$ der Laplaceschen Gleichung genügt:

$$\nabla^2 \left\{ \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right\} = \frac{1}{c^2 r} f''\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right\}.$$

Man ersieht hieraus, daß die Komponenten des Hertzschen Vektors (241) in der Tat die Differentialgleichung (240a) befriedigen:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_x}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathfrak{Z}_x \quad \text{usw.}$$

Führt man den Ausdruck (241) für den Hertzschen Vektor in (240) ein, so wird demnach eine Lösung der Feldgleichungen (239) erhalten, die im ganzen Raume, den Erregungspunkt $r = 0$ ausgenommen, endlich und stetig ist:

$$(241\text{a})\qquad \mathfrak{E} = \nabla \operatorname{div} \left\{ \frac{\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right\} - \frac{1}{c^2} \frac{\mathfrak{p}''\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r},$$

$$(241\text{b})\qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \operatorname{curl} \left\{ \frac{\mathfrak{p}'\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right\}.$$

Wir erörtern zuerst den Ausdruck für $\mathfrak{H}$. Nach Gleichung (112) ist

$$\operatorname{curl} \left\{ \frac{\mathfrak{p}'}{r} \right\} = \frac{1}{r} \operatorname{curl} \mathfrak{p}' + \left[\nabla \frac{1}{r}, \mathfrak{p}' \right],$$

und da man hat

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{r}}{r^3}, \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{p}'\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\left[\frac{\mathfrak{r}}{cr}, \mathfrak{p}''\left(t - \frac{r}{c}\right) \right],$$

so folgt

$$(242)\qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{cr^3} \left[\mathfrak{p}'\left(t - \frac{r}{c}\right), \mathfrak{r} \right] + \frac{1}{c^2 r^2} \left[\mathfrak{p}''\left(t - \frac{r}{c}\right), \mathfrak{r} \right];$$

dies ist das magnetische Feld, welches der Hertzschen Lösung entspricht.

Es mögen nun die Komponenten des Vektors $\mathfrak{p}(t)$ periodische Funktionen der Zeit sein, von der Form

$$f(t) = A \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau} + \alpha \right).$$

Dann ist die Größenordnung des ersten Gliedes in (242)

$$\frac{1}{cr^2} \cdot A \cdot \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi A}{\lambda r^2} \quad (\lambda = c\tau \text{ Wellenlänge}),$$

dagegen die Größenordnung des zweiten Gliedes

$$\frac{1}{c^2 r} \cdot A \cdot \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 = \frac{(2\pi)^2 A}{\lambda^2 r}.$$

Diese Größenordnungen verhalten sich wie λ zu $2\pi r$. Es wird demnach in Entfernungen vom Erregungspunkte, die klein gegen $\lambda/2\pi$ sind, das erste Glied, dagegen in Entfernungen, die groß gegen $\lambda/2\pi$ sind, das zweite Glied in (242) ausschlaggebend sein. Wir erörtern zunächst den ersten Fall.

A) Nachbarschaft des Erregungspunktes ($2\pi r$ klein gegen λ).

Hier ist also das zweite Glied in (242) zu vernachlässigen. Ferner ändert sich, wenn man $t - \frac{r}{c}$ statt t setzt, nur der Phasen-

winkel der trigonometrischen Funktionen, welche die Komponenten von $\mathfrak{p}$ darstellen, und zwar um $-2\pi r/\lambda$; dieser Winkel ist in dem jetzt zu betrachtenden Gebiete verschwindend klein. Man hat also

(243) $$\mathfrak{H} = \frac{1}{cr^3}\left[\mathfrak{p}'(t), \mathfrak{r}\right].$$

Dieser Ausdruck für das magnetische Feld in der Nähe des Erregungspunktes erinnert an das Biot-Savartsche Elementargesetz. In der Tat, setzt man

(243a) $$\mathfrak{p}'(t) = J(t) \cdot d\mathfrak{s},$$

so geht (243) in das Biot-Savartsche Elementargesetz für das Feld eines Stromstückes über (vgl. § 55, Gl. (168)).

Wenn hier das Biot-Savartsche Gesetz der Fernwirkungstheorie von Bedeutung wird, so ist doch nicht außer acht zu lassen, daß es sich in (243) nur um einen verstümmelten Ausdruck für das magnetische Feld handelt; nur in Entfernungen vom Stromstücke, die klein gegen $\lambda/2\pi$ sind, ersetzt er näherungsweise die wirkliche Lösung (242). Um zu dieser zu gelangen, ist zuerst in (243a) das Argument zu ändern; entsprechend

(243b) $$\mathfrak{p}'\left(t-\frac{r}{c}\right) = J\left(t-\frac{r}{c}\right) d\mathfrak{s}$$

ist für das Feld in der Entfernung r die Stromstärke zu einer um r/c zurückliegenden Zeit maßgebend. Es pflanzt sich also die magnetische Kraft vom Erregungspunkte aus nach allen Seiten mit der Geschwindigkeit c fort.

Aber auch dann, wenn man das mit Rücksicht auf die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit berichtigte Biot-Savartsche Gesetz anwenden wollte, würde man nur zum ersten Gliede von (242) gelangen. Dieses überwiegt das zweite, solange $2\pi r$ klein gegen λ ist; hingegen in Entfernungen, die groß gegen $\lambda/2\pi$ sind, ist das zweite Glied ausschlaggebend. Hier stellt auch das berichtigte Biot-Savartsche Gesetz nicht annähernd dasjenige Feld dar, welches der Lösung der Feldgleichungen entspricht. Jenem Gesetz zufolge würde, wenn man vom Stromstücke aus in einer bestimmten Richtung fortschreitet, die magnetische Feldstärke

mit dem umgekehrten Quadrate der Entfernung abnehmen; diese Lösung dagegen ergibt in großen Entfernungen eine Abnahme mit der umgekehrten Entfernung. Nach jenem ist die Stromstärke selbst, nach dieser die zeitliche Änderung der Stromstärke für das Feld bestimmend.

Diese Überlegungen zeigen, welche Rolle den Elementargesetzen in der Maxwellschen Theorie zukommt; ihre Gültigkeit bei Wechselfeldern beschränkt sich auf ein Gebiet, dessen Abmessungen klein gegen die Wellenlänge sind. Solange es sich um Wellen handelte, deren Länge nach Kilometern zählte, entzog sich der Unterschied zwischen ihnen und den Feldgesetzen der Maxwellschen Theorie der experimentellen Prüfung. Bei den Hertzschen Schwingungen dagegen macht er sich bemerkbar. Er bezieht sich nicht allein darauf, daß statt der augenblicklichen Ausbreitung des Feldes eine Fortpflanzung mit Lichtgeschwindigkeit angenommen wird. Diese Annahme hatten bereits die Fernwirkungstheoretiker in ihre Elementargesetze eingeführt. Solche Verallgemeinerungen der Elementargesetze sind indessen mit einer großen Willkür verbunden; diese Willkür wird in der Maxwellschen Theorie dadurch behoben, daß das elektrische und das magnetische Feld den differentiellen Verkettungsgleichungen genügen müssen. Ihnen genügen eben die Feldausdrücke der Hertzschen Lösung, zu deren Erläuterung wir jetzt zurückkehren.

Daß bei hochfrequentem Wechselstrom ein abgetrenntes Stromstück denkbar ist, während Gleichstrom nur in einer geschlossenen Bahn fließen kann, ist darin begründet, daß der wechselnde Leitungsstrom durch den Verschiebungsstrom im Isolator zu einem geschlossenen Strome im Sinne der Maxwellschen Theorie ergänzt wird. In der Tat, die Enden des Stromstückes werden sich abwechselnd positiv und negativ aufladen, und das von diesen Ladungen erzeugte elektrische Feld wird bei seinen Schwankungen Verschiebungsströme erregen. Welches elektrische Feld ergibt nun die Hertzsche Lösung?

In der Nachbarschaft des Erregungspunktes kann man, dem oben Gesagten gemäß, in (241a) das letzte Glied streichen, und setzen

(244) $$\mathfrak{E} = - \nabla \varphi, \qquad \varphi = - \operatorname{div} \left\{ \frac{\mathfrak{p}(t)}{r} \right\};$$

hier leitet sich also das elektrische Feld aus einem skalaren Potential ab. Nach Regel (65) wird das Potential

(244a) $$\varphi = - \mathfrak{p}(t) \nabla_a \left(\frac{1}{r} \right),$$

d. h. es entspricht nach § 15 einem elektrischen Dipole vom Momente $\mathfrak{p}$.

Man kann sich demnach einen Erreger, wie ihn die Hertzsche Lösung fordert, folgendermaßen verwirklicht denken. Ein kurzes Leiterstück trage an den Enden zwei Kugeln, deren entgegengesetzt gleiche Ladungen $\pm e(t)$ periodisch wechseln; Länge und Richtung des Leiterstückes sind durch $d\mathfrak{s}$ gegeben. Dann ist

(244b) $$\mathfrak{p}(t) = e(t) d\mathfrak{s}$$

das Moment dieses Dipoles; sein elektrostatisches Feld stimmt in Entfernungen, die groß gegen den Abstand der Kugeln sind, mit dem nach (244, 244a) berechneten überein. Der periodische Wechsel der Ladungen wird von einem Leitungsstrome begleitet sein:

$$J = \frac{de}{dt};$$ es folgt somit

(244c) $$\mathfrak{p}'(t) = J(t) d\mathfrak{s},$$

eine Beziehung, die sich mit (243a) deckt. Man sieht also: In Entfernungen, die klein gegen $\lambda/2\pi$ sind, ergibt die Hertzsche Lösung das magnetische Feld eines Stromstückes; das elektrische Feld entspricht einem Dipole, dessen Pole die durch Aufladung der Enden des Stromstückes entstehenden Elektrizitätsmengen sind.

Hieraus geht hervor, daß die Länge des gedachten Erregers klein sein muß gegen eine Länge, die ihrerseits klein gegen $\lambda/2\pi$ ist; nur dann kann sein Feld in dem soeben dargelegten Sinne als das eines Erregungspunktes betrachtet werden.

Die Feldgesetze (241a, b) lehren nun das Feld kennen, welches ein so beschaffener Erreger im Raume erzeugt. Der Ausdruck für das magnetische Feld wurde bereits in (242) angegeben; er

setzt sich aus zwei Gliedern zusammen, welche von der Stromstärke bzw. von deren zeitlicher Änderung abhängen, die zu der um r/c zurückliegenden Zeit im Erregungspunkte vorhanden waren. Der allgemeine Ausdruck für das elektrische Feld, der nicht hingeschrieben werden soll, setzt sich aus drei Gliedern zusammen, die bzw. von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ abhängen, und die mit r^{-3}, r^{-2} und r^{-1} abnehmen, wenn man vom Erregungspunkte aus längs eines Fahrstrahls fortschreitet. Wir gehen jetzt zur Besprechung der Feldgesetze für Entfernungen über, die groß gegen $\lambda/2\pi$ sind. Aus Gründen, die sogleich hervortreten werden, nennen wir dieses Gebiet die „Wellenzone".

B) Feld in der Wellenzone ($2\pi r$ groß gegen λ).

Bei der Berechnung von

$$\nabla \operatorname{div} \left\{ \frac{\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right\}$$

kann man sich auf diejenigen Glieder beschränken, die durch Ableitung des Vektors $\mathfrak{p}$, bzw. seines Argumentes $t - \frac{r}{c}$, nach den Koordinaten entstehen; denn die übrigen nehmen schneller mit wachsender Entfernung ab, und sind in dem jetzt betrachteten Gebiete zu vernachlässigen. So erhält man

$$\operatorname{div} \left\{ \frac{\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right\} = - \frac{1}{c r^2} \left(\mathfrak{r}, \mathfrak{p}'\left(t - \frac{r}{c}\right)\right),$$

$$\nabla \operatorname{div} \left\{ \frac{\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right\} = \frac{\mathfrak{r}}{c^2 r^3} \left(\mathfrak{r}, \mathfrak{p}''\left(t - \frac{r}{c}\right)\right),$$

und (241 a) ergibt

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{c^2 r^3} \left\{ \mathfrak{r}\left(\mathfrak{r}\mathfrak{p}''\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) - \mathfrak{r}^2 \mathfrak{p}''\left(t - \frac{r}{c}\right) \right\},$$

wofür man nach Regel (23) auch schreiben kann

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{c^2 r^3} \left[\mathfrak{r}\left[\mathfrak{r}\mathfrak{p}''_{t - \frac{r}{c}}\right]\right]. \tag{245}$$

Dem elektrischen Felde ordnet sich, nach (242), das magnetische zu

$$(245\text{a}) \qquad \mathfrak{H} = -\frac{1}{c^2 r^2}\left[\mathfrak{r}\mathfrak{p}''_{t-\frac{r}{c}}\right].$$

Diese Formeln stellen das elektromagnetische Feld in der Wellenzone dar.

Wie man sieht, ist für das elektrische und für das magnetische Feld lediglich das äußere Produkt der Vektoren $\mathfrak{r}$ und $-\mathfrak{p}''$ maßgebend. Es kommt also für das Feld in einem bestimmten Aufpunkt nur die Projektion von $\mathfrak{p}''$ senkrecht zum Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ in Betracht; schließt $-\mathfrak{p}''$ mit dem Fahrstrahl den Winkel ϑ ein, so ist der Betrag von $\mathfrak{H}$

$$|\mathfrak{H}| = \frac{\sin\vartheta}{c^2 r}|\mathfrak{p}''|_{t-\frac{r}{c}},$$

und die Richtung von $\mathfrak{H}$ steht nach (245a) senkrecht auf dem Fahrstrahl und ordnet sich den Richtungen von $\mathfrak{r}$ und jener Projektion von $-\mathfrak{p}''$ zu wie der Mittelfinger dem Daumen und Zeigefinger der rechten Hand.

Andererseits kann man den Ausdruck (245) für die elektrische Feldstärke schreiben

$$\mathfrak{E} = -[\mathfrak{r}_1\mathfrak{H}] = [\mathfrak{H}\mathfrak{r}_1],$$

wo $\mathfrak{r}_1$ einen zum Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ parallelen Einheitsvektor vorstellt. Da nun $\mathfrak{H}$ senkrecht auf $\mathfrak{r}_1$ steht, so sind $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ dem Betrage nach gleich:

$$(246) \qquad |\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{\sin\vartheta}{c^2 r}|\mathfrak{p}''|_{t-\frac{r}{c}}.$$

$\mathfrak{E}$ bildet mit $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{r}$ ein Tripel aufeinander senkrechter Vektoren, welche in der angegebenen Reihenfolge mit den Achsen eines rechtshändigen Bezugssystemes zur Deckung zu bringen sind. $\mathfrak{E}$ ist also parallel der Projektion von $-\mathfrak{p}''$, genommen zur Zeit $t-\frac{r}{c}$, auf die zum Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ senkrechte Ebene, und $\mathfrak{H}$ steht senkrecht auf $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{E}$.

Es liegen demnach hier ähnliche Verhältnisse vor wie bei ebenen elektromagnetischen Wellen (§ 68); die Wellen sind transversal und eilen mit Lichtgeschwindigkeit fort. Demgemäß haben wir das in Rede stehende Gebiet als „Wellenzone“ be-

zeichnet. Doch nimmt bei diesen Kugelwellen die Amplitüde beim Fortschreiten ab wie die reziproke Entfernung vom Zentrum. Auch sind die Wellen nicht homogen, sondern ihre Amplitüde ändert sich längs der Kugel mit dem Sinus des Winkels ϑ. Handelt es sich um ein Stromstück von fester Achse, so gibt ϑ den Winkel zwischen Fahrstrahl und Achse an; die Amplitüde der entsandten Wellen ist dann die stärkste für Richtungen senkrecht zur Achse, während in den Polen, wo die Achse die Kugel schneidet, die Wellenamplitüde gleich Null ist.

Die Energieströmung der Wellen bestimmt der Poyntingsche Satz. Der Poyntingsche Vektor

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$$

ist, nach den obigen Angaben über die Richtungen von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{r}$, dem Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ parallel; er hat den Betrag

$$(246\,\text{a}) \qquad |\mathfrak{S}| = \frac{c}{4\pi} \cdot |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{H}| = \frac{\sin^2\vartheta}{4\pi c^3 r^2} |\mathfrak{p}''|^2_{t-\frac{r}{c}}.$$

Die Energieströmung ist am stärksten senkrecht zur Achse des Stromstückes; sie ist Null in Richtung der Achse. Sie nimmt, bei der Ausdehnung der Wellenkugel, welche die Fortpflanzung der Welle begleitet, mit dem umgekehrten Quadrate von deren Radius ab. Die gesamte Energieströmung durch eine Kugel vom Radius r beträgt

$$S = 2\pi r^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \, |\mathfrak{S}| = \frac{1}{2c^3} \cdot \int_0^\pi d\vartheta \sin^3\vartheta \cdot |\mathfrak{p}''|^2_{t-\frac{r}{c}},$$

und infolge von

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin^3\vartheta = \int_{-1}^{+1} du(1-u^2) = \frac{4}{3} \qquad \text{erhält man}$$

$$(246\,\text{b}) \qquad S = \frac{2}{3c^3} |\mathfrak{p}''|^2_{t-\frac{r}{c}}$$

für die **Gesamtstrahlung durch eine Kugelfläche.**

Die Energie, welche durch die Kugel nach außen strömt, geht

den Schwingungen im Erregungspunkte verloren. Die Erregerschwingungen erfahren daher eine Strahlungsdämpfung.

Ist der Strom ein rein periodischer und a seine elektromagnetisch gemessene Amplitüde, so setze man

$$J = ac \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right), \qquad \text{d. h. nach (244c)} \tag{247}$$

$$\mathfrak{p}'(t) = ac \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \cdot d\mathfrak{s}, \qquad \text{mithin}$$

$$\mathfrak{p}''\left(t - \frac{r}{c}\right) = ac\frac{2\pi}{\tau} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) d\mathfrak{s}.$$

Versteht man unter l die Länge des Stromstückes, so wird

$$|\mathfrak{p}''|_{t-\frac{r}{c}} = \frac{2\pi a c^2 l}{\lambda} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi r}{\lambda}\right),$$

und diese Größe ist nach (246) für das elektromagnetische Feld in der Wellenzone maßgebend. Es wird

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{2\pi l a}{\lambda r} \sin\vartheta \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi r}{\lambda}\right). \tag{247a}$$

Wenn der Strom zur Zeit $t = 0$ zu fließen beginnt und dann nach (247) als rein periodischer Wechselstrom verläuft, so ist J und mithin $\mathfrak{p}'(t)$ für $t = 0$ stetig; jedoch $\mathfrak{p}''(t)$ ist unstetig. Daher hat man in diesem Falle eine unstetige Wellenfront, welche das von der Störung noch nicht erreichte Gebiet $r > ct$ von dem Gebiete der Störung $r < ct$ trennt.

Für die Gesamtstrahlung ergibt sich aus (246b)

$$S = \frac{8\pi^2 l^2 a^2 c}{3\lambda^2} \cos^2\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) \tag{247b}$$

und für ihren zeitlichen Mittelwert

$$\overline{S} = \frac{4\pi^2 c}{3} \cdot \frac{l^2 a^2}{\lambda^2}. \tag{247c}$$

Die mittlere Gesamtstrahlung ist also proportional dem Quadrate des Quotienten aus Länge (l) des Stromleiters und Wellenlänge λ. Um von der Größenordnung des Strahlungsverlustes eine Vorstellung zu erhalten, kann man den Widerstand R berechnen, welcher, in den Leiter eingeschaltet, den gleichen Energieverlust durch Joulesche Wärme bedingen würde. Derselbe

bestimmt sich in absolutem elektromagnetischem Maße aus

$$\bar{S} = \bar{Q} = \frac{1}{2} a^2 R;$$

der Vergleich mit (247c) ergibt

$$R = \frac{8\pi^2 c}{3} \cdot \frac{l^2}{\lambda^2}; \tag{247d}$$

Division durch 10^9 ergibt den äquivalenten Widerstand in Ohm zu

$$80\pi^2 \cdot \frac{l^2}{\lambda^2} \text{ Ohm.}$$

Das ist ein Widerstand, der keineswegs gegen den wirklichen Ohmschen Widerstand des Erregers zu vernachlässigen ist. Bei gestreckten Erregern, deren Abmessungen von der Ordnung der Wellenlänge sind, überwiegt sogar der Energieverlust durch Strahlung weitaus den Ohmschen. Man beachte übrigens, daß der äquivalente Widerstand (247d) nicht wie der Ohmsche der Länge der Leitung proportional ist, sondern dem Quadrate der Länge. Auch ist dieser Widerstand, insofern als er von der Wellenlänge abhängt, nicht als Konstante des Senders zu betrachten, sondern er ändert sich mit der Frequenz des in ihm fließenden Wechselstroms, und zwar wächst er mit dem Quadrate der Frequenz.

§ 80. Anwendung auf die drahtlose Telegraphie.

Im vorigen Paragraphen sind die elektromagnetischen Wellen ermittelt worden, die von elektrischen Schwingungen eines Stromstückes erzeugt werden. Nun ist zwar ein Stromstück theoretisch denkbar, praktisch aber hat man es immer mit stromführenden Drähten von endlicher Länge zu tun; vielfach verwendet man sogar in der drahtlosen Telegraphie Antennen, deren Länge von der Ordnung der Wellenlänge ist. Hier sind die Annahmen, welche wir über die Abmessungen des durch die Hertzsche Lösung dargestellten Erregers machen mußten, keineswegs erfüllt. Dennoch ist die Hertzsche Lösung grundlegend für die Theorie der drahtlosen Telegraphie; auf ihr fußend, kann man das Feld finden, welches von hochfrequenten Wechselströmen in

Drähten von beliebiger Länge erregt wird, und insbesondere das Feld in der Wellenzone; dies mag hier kurz dargelegt werden.

Zunächst kann man fast stets den Draht als linearen Leiter ansehen; das ist nämlich erlaubt, wenn es sich um Aufpunkte handelt, deren Abstände vom Leiter groß gegen dessen Querschnittsabmessungen sind. Dann genügt es, für jeden Querschnitt den Gesamtstrom J als Funktion der Zeit zu kennen. Man kann das magnetische Feld in der Umgebung des Drahtes als Überlagerung der von den einzelnen Stromstücken $d\mathfrak{s}$ desselben erregten Felder betrachten; auch ergibt die Überlagerung der einzelnen, durch Aufladung der Enden dieser Leiterstücke gebildeten Dipole diejenige Ladungsverteilung längs des Drahtes, die sich bei einer längs des Drahtes wechselnden Stromverteilung wirklich herstellt; das elektrische Feld in der Umgebung des Leiters ist, dieser Ladungsverteilung gemäß, als Überlagerung der Felder der einzelnen Dipole anzusehen. Diejenige Lösung der Feldgleichungen, welche in der Umgebung das Drahtes das daselbst bestehende elektromagnetische Feld ergibt, erhält man demnach durch Überlagerung der Felder der einzelnen Stromstücke. Dabei ist der Beitrag jedes einzelnen Stromstückes oder Dipoles zum Hertzschen Vektor des Gesamtfeldes aus (241) zu entnehmen, indem man, gemäß (244c), setzt

$$\mathfrak{p}'(t) = J(s, t)\, d\mathfrak{s}\,.$$

Nehmen wir an, daß bis zur Zeit $t = 0$ der Draht ohne Ladung und Strom gewesen ist; dann folgt

$$\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) = d\mathfrak{s}\int\limits_0^{t-\frac{r}{c}} dt\, J(s, t),$$

und der gesamte Hertzsche Vektor ergibt sich durch Integration längs des linearen Leiters:

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{d\mathfrak{s}}{r} \int\limits_0^{t-\frac{r}{c}} dt\, J(s, t)\,. \tag{248}$$

Wie man sieht, liefert jedes Stromstück zum Hertzschen Vektor in dem um r entfernten Aufpunkte einen Beitrag; derselbe

hängt von der Elektrizitätsmenge ab, die bis zur Zeit $t-\frac{r}{c}$ durch den betreffenden Querschnitt geflossen war; zu dieser Zeit ist von dem betreffenden Querschnitte des linearen Leiters die Störung ausgegangen, welche, mit Lichtgeschwindigkeit fortschreitend, zur Zeit t im Aufpunkte eintrifft. Aus dem Hertzschen Vektor (248) leitet sich das elektromagnetische Feld im ganzen Raume nach (240) ab.

Handelt es sich nur um das Feld in der Wellenzone, so kann man unmittelbar von den Formeln (245), (245a) ausgehen; der Beitrag jedes einzelnen Stromstückes $d\mathfrak{s}$ hängt ab von dem Vektor

$$\mathfrak{p}''\left(t-\frac{r}{c}\right)=J'\left(s,t-\frac{r}{c}\right)d\mathfrak{s}.$$

Hier kennzeichnet s die von einem festen Punkte an gerechnete Drahtlänge; mit s ändert sich im allgemeinen nicht nur der Betrag der Stromstärke, sondern, entsprechend den verschiedenen Wegen, welche die Störung zurückzulegen hat, auch die Phase, mit der sie im Aufpunkte eintrifft. Dieser Umstand sowie auch die Richtung des Stromstückes $d\mathfrak{s}$ ist bei der Berechnung des Feldes zu berücksichtigen. Für das magnetische Feld in der Wellenzone erhält man

$$\text{(248a)}\qquad \mathfrak{H}=-\frac{1}{c^2}\int\frac{1}{r^2}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}]\dot{J}'\left(s,t-\frac{r}{c}\right).$$

In besonderen Fällen vereinfacht sich die Rechnung. Wir betrachten z. B. eine Leitung, die zwei einander gegenüberstehende Platten eines Luftkondensators verbindet; es sei die Kapazität der Leitung klein gegen diejenige des Kondensators; auch sei die Wellenlänge der stattfindenden Schwingungen groß gegen die Abmessungen des Systems. In diesem Falle ist die Stromstärke für alle Querschnitte die gleiche, J ist mithin von s unabhängig; und, da die Wegunterschiede der von den verschiedenen Stromelementen ausgehenden Wellen gegen die Wellenlänge verschwinden, so sind die Phasendifferenzen zu vernachlässigen. Man kann daher (248) in diesem Falle schreiben

$$\text{(249)}\qquad \mathfrak{Z}=\int_0^{t-\frac{r}{c}}J(t)dt\int_1^2\frac{d\mathfrak{s}}{r},$$

wobei (1) und (2) die Enden der Leitung bezeichnen. Handelt es sich insbesondere um Aufpunkte, deren Entfernung vom Sendersystem groß gegen dessen Abmessungen sind, so hat man

$$\int_1^2 \frac{d\mathfrak{s}}{r} = \frac{1}{r}\int_1^2 d\mathfrak{s}.$$

Hier steht rechts die vektorielle Summe aller Stücke $d\mathfrak{s}$ der Leitung; dieselbe kann durch einen Fahrstrahl ersetzt werden, der direkt vom Anfangspunkt zum Endpunkt der Leitung führt. Setzt man endlich

$$\int_0^t J(t)\,dt = e(t),$$

wobei $e(t)$ die jeweilige Ladung der Kondensatorplatte (2) bedeutet, so erkennt man, daß

$$\int_0^t J(t)\,dt \int_1^2 d\mathfrak{s} = e(t)\int_1^2 d\mathfrak{s} = \mathfrak{p}(t)$$

nichts anderes ist als das Moment des durch die beiden Kondensatorplatten gebildeten elektrischen Dipoles. Diesem entspricht nach (249) in Entfernungen, die groß gegen die Abmessungen des Systemes sind, der Hertzsche Vektor des Systemes:

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{249a}$$

In diesem Falle eines nahezu geschlossenen Kreises, dessen Abmessungen klein sind, sowohl gegen die Wellenlänge als auch gegen die Entfernung des Aufpunktes, gilt ohne weiteres die Hertzsche Lösung. Dieses Ergebnis kommt, wie man sieht, dadurch zustande, daß sich die Beiträge der einzelnen Stromstücke, bei ihrer geometrischen Summation, fast ganz aufheben.

Das ist selbstverständlich nicht diejenige Anordnung, die man in der drahtlosen Telegraphie verwendet. Dort wird man vielmehr, um möglichst große Amplitüden der entsandten Wellen zu erzielen, die Anordnung so treffen, daß sich die Beiträge der einzelnen Stromstücke verstärken. Dies findet bei der vertikalen

Sendeantenne Marconis statt; dieselbe strahlt am stärksten senkrecht zu ihrer Richtung, d. h. längs der Erdoberfläche. In dieser Richtung kommen auch die Wegunterschiede der von den einzelnen Stromstücken der Antenne ausgesandten Wellen nicht in Betracht. Man kann, falls die Stromphase für alle Querschnitte der Antenne die gleiche ist, zur Ermittelung der Wellenamplitüde die Formel (247a) benutzen, wobei nur an Stelle der (elektromagnetisch gemessenen) Stromamplitüde a ihr Mittelwert tritt, gegeben durch

$$l\bar{a} = \int_1^2 ds a;$$

so ergeben sich die Feldstärken der senkrecht zur Antenne ausgesandten Wellen:

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{2\pi l \bar{a}}{\lambda r} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi r}{\lambda}\right). \tag{250}$$

In Richtungen jedoch, die spitze Winkel mit der Antenne bilden, sind, falls die Antennenlänge mit der Wellenlänge vergleichbar ist, die Wegunterschiede und die durch sie bedingten Phasendifferenzen der von den einzelnen Stromstücken der Antenne entsandten Beiträge in Rechnung zu setzen. Deswegen bedarf auch die Formel (247b) für die Gesamtstrahlung in diesem Falle einer Berichtigung.

Aus (250) geht hervor, daß bei gegebener Länge (l) und mittlerer Stromamplitüde ($\bar{a}$) der Antenne die Amplitüde der entsandten Wellen mit wachsender Wellenlänge abnimmt. Doch müßte man, um beurteilen zu können, inwieweit dieser den höheren Frequenzen günstige Umstand ausschlaggebend ist, auf die Theorie des Empfangssystemes näher eingehen, was hier zu weit führen würde.

Hat man statt eines einzigen Leitungsdrahtes deren mehrere, so sind deren Hertzsche Vektoren (248) geometrisch zu summieren, um das gesamte Feld zu erhalten. Sind die Drähte geradlinig und parallel, so kommt die Summation auf eine algebraische heraus.

Bei mehreren parallelen Drähten, deren Abstände klein gegen

die Wellenlänge sind, und die in gleichem Sinne und in gleicher Phase vom Strome durchflossen werden, verstärken sich die von den einzelnen Drähten entsandten Wellen. Dies findet z. B. bei den sogenannten „Käfigantennen“ statt.

Fließt in zwei parallelen, gleichlangen Drähten, deren Abstand klein gegen die Wellenlänge ist, Strom in gleicher Stärke und in jeweils entgegengesetzter Richtung, so heben sich die Beiträge der beiden Drähte zum Felde in der Wellenzone auf, und es findet keine Entsendung von Wellen statt. Dies war der am Schlusse von § 75 erwähnte Fall.

Befinden sich zwei Drähte in der Entfernung einer halben Wellenlänge, und schwingen sie in gleicher Phase, so verstärken sich die Wellen, die senkrecht zur Ebene der beiden Drähte entsandt werden; dagegen in der Ebene der Drähte, senkrecht zu diesen, werden Wellen entsandt, die gleiche Amplitüde, aber, wegen des Wegunterschiedes von einer halben Wellenlänge, entgegengesetzte Phasen besitzen; dieser Richtungseffekt ist für die drahtlose Telegraphie von Interesse.

Bisher haben wir nicht von der Rolle der Erde bei der drahtlosen Telegraphie gesprochen. Darf man die Erde als eben und als vollkommen leitend ansehen, so kann man ihrem Einfluß durch ein Spiegelungsverfahren Rechnung tragen, ähnlich dem in der Elektrostatik (§ 32) gebräuchlichen. Ein Dipol geht dabei in einen anderen Dipol über, derart, daß spiegelbildlich sich entsprechende Punkte der beiden Dipole entgegengesetzt geladen sind. Demnach entspricht einem vertikalen Dipol als Spiegelbild ein Dipol von gleichem und gleich gerichtetem Momente, einem horizontalen dagegen ein gespiegelter Dipol, dessen Moment den gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtung hat. Dies erklärt die gute Wirkung der vertikalen, die schlechte der horizontalen Antennen; letztere müßten nach dieser Auffassung, wenn sie der Erde nahe sind, überhaupt keine Wellen aussenden. Berechnet man das Feld einer vertikalen Antenne nach (250), so kann man die Wirkung der gut leitenden Erde dadurch berücksichtigen, daß man das Spiegelbild der Antenne hinzufügt; dem entspricht eine Verdoppelung der Wellenamplitüden.

Kommt die Kugelgestalt und die endliche Leitfähigkeit der Erde in Betracht, so führt bei dem elektrodynamischen Probleme das Spiegelungsverfahren nicht mehr zum Ziele. Unter Vernachlässigung der Krümmung, aber unter Berücksichtigung der endlichen Leitfähigkeit sowie der elektrischen Eigenschaften des Erdreiches hat J. Zenneck die Fortpflanzung ebener Wellen behandelt, während A. Sommerfeld die Lösung, die einem vertikalen Dipol an der Erdoberfläche entspricht, ausgewertet und erläutert hat. Der Widerstand trockener Erde, der auf die Ausbreitung der Wellen einen wesentlichen Einfluß hat, beeinträchtigt die Wirkung um so weniger, je größer die Wellenlänge ist. Das weit besser leitende Meerwasser kann so weit, als die Krümmung der Erde außer Betracht bleiben darf, noch als vollkommen leitend betrachtet werden, was die Amplitüde der entsandten Wellen anbelangt.

Ergänzende Ausführungen und Literaturangaben über die Theorie der elektrischen Wellen und der drahtlosen Telegraphie findet man in dem betreffenden Artikel (Bd. V, Art. 18) der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

Vierter Abschnitt.

Weiterer Ausbau der Theorie.

Erstes Kapitel.

Die ferromagnetischen Körper.

§ 81. Die magnetische Hysteresis.

Wir haben bereits früher (§ 53) auf die Sonderstellung hingewiesen, welche die ferromagnetischen Körper einnehmen. Bei ihnen ist die magnetische Permeabilität keine Stoffkonstante, sondern sie ist ihrerseits von der Feldstärke abhängig. Die Proportionalität der Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$, welche eine wesentliche Voraussetzung der Feldgleichungen und des Ausdruckes der magnetischen Energie war, findet hier nicht mehr statt. Wir mußten daher im vorigen Abschnitte, bei der Entwicklung der aus jenen Feldgleichungen zu ziehenden Folgerungen, öfters die ferromagnetischen Körper ausschließen und ihre Behandlung diesem letzten Abschnitte vorbehalten.

Man könnte nun daran denken, die ferromagnetischen Körper in der Weise in die Maxwellsche Theorie einzuordnen, daß man an den Hauptgleichungen festhielte, aber an Stelle der einfachen Proportionalität der Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ eine verwickeltere Funktionsbeziehung setzte. An den Hauptgleichungen werden wir allerdings festhalten müssen. Wir werden aber nicht annehmen dürfen, daß in ferromagnetischen Körpern noch der jeweilige Wert von $\mathfrak{B}$ stets durch den jeweiligen Wert von $\mathfrak{H}$ bestimmt sei. Daß dem nicht so ist, zeigen die Vorgänge der magnetischen Hysteresis.

Bringt man ein Eisenstück in ein magnetisches Feld und läßt die Feldstärke allmählich wachsen, so wächst auch die magne-

tische Induktion, und zwar anders, als es der einfachen Proportionalität entsprechen würde. Man kann das Anwachsen der Induktion mit der Feldstärke durch eine Kurve veranschaulichen, indem man den Betrag von $\mathfrak{H}$ als Abszisse, den Betrag von $\mathfrak{B}$ als Ordinate aufträgt. Läßt man aber jetzt die Feldstärke wiederum abnehmen, so wird keineswegs dieselbe Kurve in entgegengesetztem Sinne beschrieben, sondern die Induktion nimmt nach einer anderen Kurve ab; es entspricht einer und derselben Feldstärke jetzt eine andere, und zwar eine größere Induktion. Es gibt demnach gar keine allgemeingültige Beziehung zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$, der Wert von $\mathfrak{B}$ hängt nicht nur von dem jeweiligen Felde, sondern auch von der Vorgeschichte des Eisenstückes ab. Die Magnetisierung folgt nicht sogleich der Feldstärke, sondern es bleibt gewissermaßen ein Teil der früheren Magnetisierung zurück; diese Erscheinung bezeichnet man als magnetische Hysteresis. Läßt man nun die Feldstärke $\mathfrak{H}$ periodisch zunehmen und abnehmen, so wird die Veränderung von $\mathfrak{B}$ durch eine geschlossene Kurve, die sogenannte Hysteresisschleife, dargestellt. Dabei findet eine Wärmeentwicklung in dem Eisen statt.

Eine solche Wärmeentwicklung hatten wir bisher bei der Behandlung der Energievorgänge im magnetischen Felde nicht berücksichtigt. Wir haben indessen bereits im § 55 bemerkt, daß auch hinsichtlich des Energieausdruckes die ferromagnetischen Körper eine Sonderstellung einnehmen. Wir müssen jetzt die Behandlung der Energievorgänge von neuem aufnehmen.

Wir denken uns das Eisenstück in einem Raume befindlich, der durch eine geschlossene Fläche f begrenzt ist. Außerhalb dieser Fläche mögen sich ferromagnetische Körper nicht befinden; es mögen hier die Entwicklungen des vorigen Abschnittes ohne Einschränkung gelten. Dieselben ergeben, daß pro Sekunde in das Innere der geschlossenen Fläche f eine Energiemenge tritt, die sich aus dem Poyntingschen Energiestrome (§ 76) berechnet. Schließen wir der Einfachheit wegen eingeprägte elektrische Kräfte aus, so ist nach (227)

$$(251) \qquad -\int \mathfrak{S}_n df = -\frac{c}{4\pi}\int [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_n df$$

der gesamte, in der Zeiteinheit in das Innere von f tretende Energiestrom (n ist hier diejenige Normale, die nach dem Äußeren des Raumes weist, in welchem das Eisenstück sich befindet). Wir wollen annehmen, daß $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ im Inneren dieses Raumes stetig verteilt sind; dann geht nach (102a) die rechte Seite von (251) über in

$$\frac{c}{4\pi}\int dv\,\{\mathfrak{E}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{E}\}.$$

Dies ist die Energie, die pro Sekunde dem Raume v zugeführt wird und die daher gleich sein muß der Summe aus der Zunahme der elektromagnetischen Energie

$$W = U + T$$

und der im Eisenstücke stattfindenden Wärmeentwicklung; diese letztere setzt sich zusammen aus der Jouleschen Wärme Q und der infolge der magnetischen Hysteresis stattfindenden Wärmeentwicklung, die wir mit Q_m bezeichnen wollen; wir erhalten daher

$$(252)\quad \frac{dU}{dt} + \frac{dT}{dt} + Q + Q_m = \frac{c}{4\pi}\int dv\,\{\mathfrak{E}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{E}\}.$$

Neben dieser allgemeinen Forderung der Maxwellschen Theorie legen wir die Hauptgleichungen des § 59 der Behandlung der ferromagnetischen Körper zugrunde. Führt man dementsprechend

$$\mathrm{curl}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{i} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \mathrm{curl}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}$$

in (252) ein, so erhält man

$$(253)\quad \frac{dU}{dt} + \frac{dT}{dt} + Q + Q_m = \int dv\left\{\mathfrak{E}\,\mathfrak{i} + \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\right\}.$$

Nun zeigen die ferromagnetischen Körper in elektrischer Hinsicht kein von den anderen Leitern abweichendes Verhalten; es ist also

$$Q = \int dv(\mathfrak{E}\,\mathfrak{i})$$

die Joulesche Wärme, und

$$\frac{dU}{dt} = \int dv\,\frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{E}\,\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}\int dv\,\frac{\varepsilon\mathfrak{E}^2}{8\pi} = \frac{d}{dt}\int dv\,\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}\mathfrak{D})$$

die Zunahme der elektrischen Energie im Raume v.

Für die Summe aus der Zunahme der magnetischen

Energie und aus der magnetischen Wärmeentwicklung ergibt sich

(254) $$\frac{dT}{dt} + Q_m = \frac{1}{4\pi}\int dv \left(\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right).$$

Wir wenden diesen Ausdruck zuerst auf einen magnetischen Kreisprozeß von der Periode τ an. Die Werte der Feldstärke $\mathfrak{H}$, der Induktion $\mathfrak{B}$ und der magnetischen Energie T, die zur Zeit t bestanden, kehren zur Zeit $t+\tau$ wieder, nachdem die Hysteresisschleife durchlaufen ist. Die Integration über eine Periode ergibt daher

(254a) $$\int_t^{t+\tau} dt\, Q_m = \frac{1}{4\pi}\int dv \int_t^{t+\tau} dt\left(\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right).$$

Für die pro Volumeinheit stattfindende Wärmeentwicklung in einer Periode erhalten wir

(254b) $$\int_t^{t+\tau} dt\, Q_m = \frac{1}{4\pi}\int_t^{t+\tau} dt\left(\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right) = \frac{1}{4\pi}\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{B},$$

wobei das Integral der rechten Seite über den durch die Hysteresisschleife angegebenen Weg zu erstrecken ist. Es gibt, wie zuerst E. Warburg gezeigt hat, in der Tat die Wärmeentwicklung an, welche bei dem magnetischen Kreisprozeß stattfindet; dieselbe ist gleich dem durch 4π geteilten Flächeninhalte der Hysteresisschleife. Führen wir wieder den durch (173) definierten Vektor $\mathfrak{M}$ der Magnetisierung ein, so wird

$$d\mathfrak{B} = d\mathfrak{H} + 4\pi\, d\mathfrak{M},$$

und weil das über die geschlossene Kurve erstreckte Integral

$$\frac{1}{4\pi}\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{H} = \frac{1}{8\pi}\oint d\mathfrak{H}^2$$

verschwindet, so ist

(254c) $$\oint dt\, Q_m = \oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{M}$$

ein mit (254b) gleichwertiger Ausdruck für die Wärmeentwicklung bei dem magnetischen Kreisprozeß.

§ 82. Der permanente Magnetismus.

Bei der Integration über den Kreisprozeß fiel aus (254) die magnetische Energie heraus; aus den obigen Betrachtungen läßt sich kein allgemeingültiger Ausdruck für die magnetische Energie eines Eisenstückes gewinnen. Man kann indessen aus (254) die Energieänderungen im Felde ferromagnetischer Körper berechnen, wenn man sich auf solche Vorgänge beschränkt, die ohne magnetische Wärmeentwicklung verlaufen. Zu diesen Vorgängen gehören die Wechselwirkungen permanenter Magnete, mit denen wir uns im folgenden beschäftigen.

Bringt man einen permanenten Magneten in einen Raum, in welchem vorher kein magnetisches Feld bestanden hat, und in dem sich sonst keine magnetisierbaren Körper befinden, so herrscht im Innern des Magneten und in seiner Umgebung nur das selbsterregte oder „eigene Feld" des Magneten. Im Innern des Magneten besteht ferner eine „remanente Magnetisierung" $\mathfrak{M}$. Feldstärke und Magnetisierung zusammen ergeben die magnetische Induktion:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}. \tag{255}$$

Wird nun, sei es durch elektrische Ströme oder durch andere Magnete, ein „fremdes Feld" erregt, so erfährt $\mathfrak{H}$ eine entsprechende Änderung; auch der Magnetisierungsvektor $\mathfrak{M}$ ändert sich, indem zu der remanenten eine „temporäre Magnetisierung" tritt; diese verschwindet wieder mit dem Verschwinden des fremden Feldes, während die remanente Magnetisierung zurückbleibt.

Wir wollen nun im folgenden, bei der Behandlung der mechanischen Kräfte, den Fall ins Auge fassen, daß die temporäre Magnetisierung gegenüber der remanenten zu vernachlässigen ist; dieser Fall wird mit um so größerer Annäherung verwirklicht sein, je schwächer das fremde Feld und je stärker die remanente Magnetisierung ist. In Strenge ist der angenommene Fall freilich nie verwirklicht; dennoch hat seine Behandlung insofern Interesse, als dabei die Eigentümlichkeiten der permanenten Magnete deutlicher hervortreten. Die dabei vernachlässigten, durch die temporäre Magnetisierung bedingten Kräfte können

übrigens unschwer berechnet werden, ähnlich wie es früher für magnetisch weiche Körper geschah. Wenn diese Kräfte unter den gegebenen Umständen gegen die von dem remanenten Magnetismus herrührenden Kräfte zu vernachlässigen sind, werden wir den Körper „magnetisch hart" nennen. Für jedes Stück eines starren, magnetisch harten Körpers sind die Magnetisierung $\mathfrak{M}$ und das von dieser herrührende Eigenfeld als konstant anzusehen.

Demnach gilt bei einer Änderung $d\mathfrak{H}$ des fremden Feldes nach (255)

(255a) $$d\mathfrak{B} = d\mathfrak{H}.$$

Die Änderung ist umkehrbar, sie geschieht ohne Wärmeentwicklung; demgemäß ist, nach (254),

(255b) $$dT = \frac{1}{4\pi}\int dv\,\mathfrak{H}\,d\mathfrak{B}$$

die Energieänderung des magnetisch harten Körpers. Die Integration ist natürlich über das ganze Feld zu erstrecken, auch über den Außenraum, da man die Energie des hier erregten Feldes mit zur Energie des Magneten rechnen muß.

Wir betrachten nun das magnetische Feld eines Systemes ruhender, permanenter Magnete. Ein elektrisches Feld und ein elektrischer Strom sollen nicht vorhanden sein, es ist daher, der ersten Hauptgleichung zufolge,

(256) $$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 0.$$

Die Feldstärke $\mathfrak{H}$ ist auch im Felde permanenter Magnete wirbelfrei; sie leitet sich aus einem skalaren Potentiale φ_m ab:

(256a) $$\mathfrak{H} = -\nabla \varphi_m.$$

Wir halten ferner an der Grundannahme fest, daß die magnetische Induktion durchweg quellenfrei verteilt ist, d. h. daß es keinen wahren Magnetismus gibt. Wir legen demnach auch der Theorie der magnetisch harten Körper die Bedingung zugrunde

(256b) $$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Die Gleichungen (256) und (256b), welche behaupten, daß

$\mathfrak{H}$ wirbelfrei, $\mathfrak{B}$ aber quellenfrei verteilt ist, haben wir bereits im vorigen Abschnitte der Theorie der magnetischen Felder in stromlosen Bereichen zugrunde gelegt (vgl. § 56). Wir können auch jetzt, wo magnetisch harte Körper im Felde sich befinden, eine entsprechende Darstellung des Feldes geben.

Wir berechnen das wirbelfreie Feld $\mathfrak{H}$ aus seinen Quellen, indem wir

(257) $$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 4\pi \varrho_m'$$

setzen und unter ϱ_m' die „Dichte des freien Magnetismus" verstehen. Da nach (173)

(257a) $$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{M}$$

ist, und da die Divergenz von $\mathfrak{B}$ durchweg Null ist, so wird

(257b) $$\operatorname{div} \mathfrak{H} = -4\pi \operatorname{div} \mathfrak{M}.$$

Ist die remanente Magnetisierung eines Stahlstückes bekannt, so ist auch die Verteilung des freien Magnetismus durch

(257c) $$\varrho_m' = -\operatorname{div} \mathfrak{M}$$

gegeben (vgl. auch 173b). Der freie Magnetismus haftet also an den Stücken des magnetisch harten Körpers. Von einer flächenhaften Verteilung des freien Magnetismus wollen wir hier absehen, indem wir uns $\mathfrak{H}$ stetig verteilt denken.

Aus der gegebenen Verteilung des freien Magnetismus in den permanenten Magneten berechnet sich das skalare Potential

(257d) $$\varphi_m = \int \frac{dv\,\varrho_m'}{r}.$$

Dadurch ist dann das magnetische Feld $\mathfrak{H}$ außerhalb und innerhalb der Magnete bestimmt, falls diese in den leeren Raum eingebettet sind. Sind außerdem magnetisch weiche Körper im Felde, so ist auch der in ihrem Innern und an ihrer Oberfläche befindliche freie Magnetismus in Rechnung zu ziehen; dieser ist indessen nicht konstant, sondern er ändert sich mit der Lage der permanenten Magnete. Um eine solche Erschwerung der Aufgabe zu vermeiden, wollen wir weiterhin annehmen, daß die Magnete in den leeren Raum eingebettet sind. Außerhalb der Magnete stimmt dann $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{H}$ überein; innerhalb der Magnete

ist $\mathfrak{B}$ nach (257a) zu berechnen, aus $\mathfrak{H}$ und der gegebenen remanenten Magnetisierung $\mathfrak{M}$.

Wir haben bereits im § 55 darauf hingewiesen, daß das magnetische Feld, welches von para- und diamagnetischen Körpern erregt wird, kein selbständiges Dasein führt. In einem durchweg stromlosen Raume, der nur von solchen Körpern erfüllt ist, kann ein magnetisches Feld nicht dauernd bestehen. Es müssen irgendwo im Raume elektrische Ströme oder permanente Magnete sich befinden; andernfalls kann ein magnetisches Feld nicht dauernd bestehen. Die para- und diamagnetischen Körper beeinflussen nur das Feld, aber sie erzeugen es nicht. Wir haben in § 55 gesehen, daß dieses Verhalten eng mit dem Energieausdruck (162) zusammenhing, und geschlossen, daß für Körper, die remanenter Magnetisierung fähig sind, d. h. die selbständig, ohne Mitwirkung elektrischer Ströme, ein magnetisches Feld zu erzeugen vermögen, jener Energieausdruck aufzugeben ist. Ein allgemeingültiger Ausdruck für die Energie ferromagnetischer Körper ist uns auch jetzt nicht bekannt. Wohl aber sind wir oben in (255b) zu einem Ausdrucke für die Änderung der Energie eines magnetisch harten Körpers gelangt.

Da $\mathfrak{M}$ konstant ist, wird nach (232a) die auf die Volumeinheit bezogene Energieänderung:

$$\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\,d\mathfrak{B} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\,d\mathfrak{H} = \frac{1}{8\pi}\,d\mathfrak{H}^2.$$

Außerhalb der Magnete, wo $\mu = 1$ ist, stellt dieser Ausdruck ebenfalls die Änderung der magnetischen Energiedichte dar.

Verstehen wir unter T_0 die Energie des ganzen Feldes in einer bestimmten Anfangslage der permanenten Magnete, wo das Feld $\mathfrak{H}_0$ herrscht, so bestimmt

$$T - T_0 = \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}^2 - \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}_0^2 \tag{258}$$

die F e l d e n e r g i e T bei einer beliebigen Konfiguration der Magnete.

Denken wir uns nun die Magnete so langsam gegeneinander bewegt, daß die durch die Feldänderungen entstehenden elektri-

schen Kräfte und die dabei erregte elektrische Energie und Joulesche Wärme zu vernachlässigen sind, so ist die Abnahme der Feldenergie gleich der Arbeit, welche die mechanischen Kräfte bei der Bewegung leisten. Es spielt demnach für die Wechselwirkungen permanenter Magnete die Feldenergie T die Rolle einer potentiellen Energie. Da aber T nur durch eine additive Konstante von

$$U_m = \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \tag{258a}$$

verschieden ist, so lassen sich die Kräfte, welche permanente Magnete aufeinander ausüben, ableiten, indem man U_m als potentielle Energie des Feldes einführt. Die potentielle Energie erscheint dabei als verteilt über das ganze Feld, sowohl außerhalb als auch innerhalb der Magnete. Der erhaltene Energieausdruck entspricht demnach den Grundvorstellungen der Nahewirkungstheorie.

Es ist aber leicht, U_m auf eine Form zu bringen, welche den Vorstellungen der Fernwirkungstheorie über die Energieverteilung entspricht. Nach (256a) wird

$$U_m = -\int \frac{dv}{8\pi} (\mathfrak{H} \nabla \varphi_m),$$

was auf Grund der Formel (66) übergeht in

$$U_m = \int \frac{dv}{8\pi} \varphi_m \operatorname{div} \mathfrak{H} - \int \frac{df}{8\pi} \varphi_m \mathfrak{H}_n.$$

Das über die Begrenzungsfläche f erstreckte Integral verschwindet, wenn die Fläche ins Unendliche rückt. Führt man endlich die durch (257) gegebene Dichte ϱ'_m des freien Magnetismus ein, so wird

$$U_m = \frac{1}{2} \int dv \, \varphi_m \varrho'_m. \tag{258b}$$

Hier erscheint nun die Energie als verteilt über die Stücke der Magnete, in denen der freie Magnetismus seinen Sitz hat. Berechnen wir endlich das skalare Potential φ_m aus (257d), so wird

$$U_m = \int\int \frac{dv_1 \, dv_2 \, \varrho'_{m1} \varrho'_{m2}}{r_{12}}. \tag{258c}$$

Das Integral ist über alle Paare je zweier Magnetstücke zu nehmen, wobei jedes Paar nur einmal in Rechnung zu setzen ist. Dieser Ausdruck führt nun unmittelbar zum Coulombschen Gesetze. Denn die Arbeit, welche die Kräfte des Feldes bei der Verschiebung zweier Magnete gegeneinander leisten, bestimmt sich aus der Abnahme der potentiellen Energie U_m bei der Verschiebung. Die gleiche Arbeit wird erhalten, wenn man für die Wechselwirkung je zweier Stücke der beiden Magnete die abstoßende Kraft

$$\frac{dv_1 \varrho'_{m1} \cdot dv_2 \varrho'_{m2}}{r_{12}^2}$$

in Ansatz bringt, dem Coulombschen Gesetze der Fernwirkungstheorie entsprechend. Aus der Gleichwertigkeit der Arbeiten bei einer beliebigen Verrückung folgt aber auf Grund des Prinzips der virtuellen Arbeit sofort die Gleichheit der Kräfte.

Die Kräfte, welche permanente Magnete aufeinander ausüben, bestimmen sich also durch das Coulombsche Gesetz. An den Quellpunkten des Feldes $\mathfrak{H}$, d. h. an den Punkten, in denen freier Magnetismus sich befindet, greifen die bewegenden Kräfte an. Die Massen, an denen die Kräfte angreifen, fallen zusammen mit denen, die das Kraftfeld erzeugen. Damit sind wir nunmehr völlig bei der Darstellungsweise der Fernwirkungstheorie angelangt.

Wenn nun auch diese Darstellung mathematisch zulässig ist, so ist sie doch wenig geeignet, in das Wesen des Magnetismus eine Einsicht zu gewähren. Haben wir den freien Magnetismus doch nur als Rechnungsgröße, nicht als Substanz angesehen. Nun können wir die gegebene Darstellung etwas abändern. Wir können uns die Magnete entfernt denken und uns das Feld $\mathfrak{H}$ jetzt im leeren Raume vorstellen. Im leeren Raume ist $\mathfrak{H}$ gleich $\mathfrak{B}$, und der freie Magnetismus geht in den wahren Magnetismus über. Es würde demnach das Feld $\mathfrak{H}$ auf den im leeren Raume verteilt gedachten wahren Magnetismus Kräfte ausüben, die ganz den Kräften entsprechen würden, mit denen das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ auf die wahre Elektrizität wirkt. Die Zusammensetzung dieser Kräfte führt wiederum zu den Kräften und Drehkräften,

die an dem betreffenden permanenten Magneten wirklich angreifen.

In die hier gegebene Darstellung paßt indessen auch dieses Bild nicht. Denn wir haben das Bestehen von wahrem Magnetismus ausgeschlossen; jenes vorgestellte Feld im leeren Raume, durch das wir das wirkliche Feld abbildeten, ist hiermit nicht vereinbar. Wir wollen der in diesem Paragraphen entwickelten Darstellung des Feldes permanenter Magnete jetzt eine zweite an die Seite stellen, welche der quellenfreien Natur der magnetischen Induktion von vornherein gerecht wird.

§ 83. Äquivalenz von Magneten und elektrischen Strömen.

Wir knüpfen an die Entwicklungen des § 57 an. Wir haben dort eine Darstellung des magnetischen Feldes kennen gelernt, welche nicht sowohl das wirbelfreie Feld $\mathfrak{H}$ durch seine Quellen, als vielmehr das quellenfreie Feld $\mathfrak{B}$ durch seine Wirbel bestimmt. Wir führten eine dem Wirbel von $\mathfrak{B}$ proportionale Größe $\mathbf{i}'$ ein, die räumliche Dichte des „freien elektrischen Stromes“, die durch die Gleichung (175) bestimmt war:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{B} = \frac{4\pi \mathbf{i}'}{c} \,. \tag{259}$$

Sind die Wirbel von $\mathfrak{B}$ flächenhaft verteilt, so tritt noch ein freier flächenhafter Strom $\mathbf{j}'$ hinzu (vgl. 175a). Doch wollen wir es vorziehen, die Wirbel zunächst als räumlich verteilt anzusehen; wir behalten uns vor, später den Grenzübergang vom räumlichen zum Flächenwirbel zu machen.

Setzt man nun für das Vektorpotential

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \int \frac{dv\, \mathbf{i}'}{r} \tag{259a}$$

und leitet aus ihm die magnetische Induktion ab, vermöge

$$\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A} \,, \tag{259b}$$

so wird der Bedingung des Verschwindens der Divergenz von $\mathfrak{B}$ überall Genüge geleistet.

Es handelt sich nur noch darum, den Vektor $\mathbf{i}'$ zu ermitteln.

Da ein wahrer Strom im Felde nicht vorhanden ist, so ist $\mathfrak{H}$ wirbelfrei (256). Es folgt daher aus (257a) und (259):

$$\frac{\mathfrak{i}'}{c} = \operatorname{curl} \mathfrak{M}. \tag{259c}$$

Die Dichte des freien Stromes ist dem Wirbel der Magnetisierung proportional. Da die Magnetisierung eines magnetisch harten Körpers unveränderlich sein soll, so haftet der freie Strom an den Stücken der permanenten Magnete. Werden die Magnete gegeneinander bewegt, so ändert sich die Verteilung und die Intensität der freien Ströme in ihrem Innern nicht.

Durch (259a, b, c) ist nunmehr das Feld des Vektors $\mathfrak{B}$ sowohl außerhalb wie innerhalb der Magnete bestimmt. Das Feld $\mathfrak{H}$ ist außerhalb der Magnete, im leeren Raume, dem Felde $\mathfrak{B}$ gleich; im Innern der Magnete hingegen ist $\mathfrak{H}$ aus $\mathfrak{B}$ und der gegebenen Magnetisierung $\mathfrak{M}$ auf Grund von (257a) zu berechnen.

Die Darstellung des Feldes permanenter Magnete als Wirbelfeld ist zuerst von Ampère befürwortet worden. Ampère knüpfte dabei an die Äquivalenz eines Kreisstromes und einer magnetischen Schale an. Wir wollen nicht versäumen, diese Äquivalenz aus der soeben gegebenen allgemeinen Darstellung abzuleiten.

Wir denken uns zu diesem Zwecke einen Zylinder aus magnetisch hartem Stahl, dessen Begrenzungsebenen einen gegen ihre eigenen Abmessungen sehr kleinen Abstand h besitzen, und dessen Erzeugenden senkrecht zu diesen Ebenen stehen. Der Zylinder soll, parallel den erzeugenden Geraden, gleichförmig magnetisiert sein. Dieses Gebilde, insbesondere den Grenzfall verschwindend kleiner Höhe h des Zylinders, bezeichnet man als ebene magnetische Schale.

Es sind nun die Wirbel von $\mathfrak{M}$ zu bestimmen; der räumliche Wirbel ist durchweg Null, da innerhalb der Schale $\mathfrak{M}$ konstant ist und außerhalb $\mathfrak{M}$ gleichfalls konstant, nämlich gleich Null ist. Auf den zueinander parallelen Begrenzungsebenen des Zylinders befindet sich kein Flächenwirbel, da $\mathfrak{M}$ hier senkrecht gerichtet ist. Eine Unstetigkeit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{M}$ liegt nur an der Mantelfläche des Zylinders vor. Die

Dichte des hier befindlichen Flächenwirbels ist gleich dem konstanten Betrage von $\mathfrak{M}$ innerhalb des Zylinders; der Umlaufssinn ist durch die Richtung von $\mathfrak{M}$ im Zylinder bestimmt. Wir verstehen unter $d\mathfrak{s}$ die Stücke der Mittellinie der Mantelfläche des Zylinders; der Fortschreitungssinn längs dieser Mittellinie soll dem Umkreisungssinne der Wirbel durch eine Rechtsschraube zugeordnet sein. Der freie Strom ist dann parallel zu $d\mathfrak{s}$; seine Flächendichte ist gemäß (259c) gleich der Dichte des Flächenwirbels von $\mathfrak{M}$, multipliziert mit der universellen Konstanten c. Senkrecht zu einer jeden der Zylindererzeugenden fließt also im ganzen der freie Strom:

$$J' = c\,|\mathfrak{M}|\,h\,. \tag{260}$$

Geht man nun zum Grenzfalle eines verschwindend kleinen h über, indem man gleichzeitig die Magnetisierung $|\mathfrak{M}|$ wachsen läßt, derart, daß das Produkt der beiden Größen einem endlichen Grenzwert zustrebt, so wird der flächenhaft verteilte Strom zur Stromlinie. Das Vektorpotential der magnetischen Schale wird dann

$$\mathfrak{A} = \frac{J'}{c}\int\frac{d\mathfrak{s}}{r}\,. \tag{260a}$$

Es stimmt durchweg überein mit dem Vektorpotential, welches ein Strom von der gleichen Stromstärke, der längs der Randkurve der magnetischen Schale fließt, im leeren Raume erzeugen würde (vgl. 168a).

Wir haben uns bisher auf eine ebene Schale beschränkt. Wir können aber ohne Schwierigkeit das Ergebnis auf eine Schale von gekrümmter Mittelfläche ausdehnen, deren Krümmungsradius groß gegen die Schalendicke ist. Wir zerlegen die Schale in Flächenstücke, die als eben zu betrachten sind, und wenden auf jedes dieser Flächenstücke die obige Betrachtung an. Längs der Umfangslinie eines solchen Flächenstückes ist dann der freie Strom J' anzunehmen, der durch (260) angegeben ist. Ist nun das Produkt aus der Magnetisierung $|\mathfrak{M}|$ der Schalenstücke und der Schalendicke h längs der Schale konstant, so hat J' für alle Umfangslinien den gleichen Wert. In dem Ausdrucke (260a) des Vektorpotentiales heben sich alsdann die Beiträge derjenigen

Kurvenstücke heraus, welche zwei Flächenstücke begrenzen, und die daher zweimal in entgegengesetztem Sinne zu durchlaufen sind, und es bleibt nur das Integral längs der Randkurve der ganzen Schale übrig. Das Vektorpotential ist auch jetzt dasjenige eines die Umlaufslinie der Schale umkreisenden Stromes. Durch das Vektorpotential ist aber das Feld $\mathfrak{B}$ eindeutig bestimmt. Es stimmt also im ganzen Raume das Feld des Vektors $\mathfrak{B}$ und daher außerhalb der Schale auch das Feld des Vektors $\mathfrak{H}$, das von der magnetischen Schale erregt wird, mit dem Felde eines längs der Randkurve fließenden Stromes überein.

Stellen wir andererseits das Feld $\mathfrak{H}$ in der im vorigen Paragraphen angegebenen Weise durch seine Quellen dar, so ergibt es sich als herrührend von einer magnetischen Doppelschicht vom Momente $|\mathfrak{M}|h$ pro Flächeneinheit. Das Feld $\mathfrak{H}$ der Doppelschicht wird im Innern der Schale gleichzeitig mit der Magnetisierung $\mathfrak{M}$, die entgegengesetzt zu $\mathfrak{H}$ weist, beim Grenzübergang zu verschwindend kleinem h unendlich, wenn anders das Produkt $|\mathfrak{M}|h$ endlich bleiben soll. Außerhalb der Schale aber stimmt, wie oben gezeigt wurde, das Feld $\mathfrak{H}$ der Doppelschicht überein mit dem Felde einer die Schale umrandenden Stromlinie von der elektromagnetisch gemessenen Stromstärke

$$\frac{J'}{c} = |\mathfrak{M}|h.$$

Damit sind wir zu der bereits in § 24 dargelegten Äquivalenz von Wirbelfaden und Doppelschicht zurückgelangt.

Das Stromsystem, das wir im Innern der magnetisch harten Körper angenommen haben, ist selbstverständlich kein wirkliches Stromsystem. Wahren Leitungsstrom haben wir vielmehr ausgeschlossen, indem wir curl $\mathfrak{H}$ gleich Null gesetzt haben. Demgemäß gibt das fingierte Stromsystem zu keiner Jouleschen Wärmeentwicklung Veranlassung, ein Durchschneiden der Stromfäden zu keiner Elektrizitätsanhäufung. Jenes System „freier elektrischer Ströme“ ist nichts als das Wirbelfeld des quellenfreien Vektors $\mathfrak{B}$; es dient zunächst nur zur mathematischen Darstellung dieses Feldes.

Wir können nun aber wiederum die gegebene Darstellung in ähnlicher Weise abändern wie im vorigen Paragraphen. Wir können uns die Magnete entfernt denken und uns das Feld $\mathfrak{B}$ jetzt im leeren Raume vorstellen. Im leeren Raume ist $\mathfrak{B}$ gleich $\mathfrak{H}$, wir können hier den Wirbel von $\mathfrak{B}$ als wirklichen Strom deuten. Durch diese Deutung wird die Weiterbildung der Theorie des Magnetismus angebahnt, indem eine Erklärung durch Annahme verborgener Elektrizitätsbewegungen nahegelegt wird. Man hat diese Erklärung zu verschiedenen Zeiten in verschiedener Weise zu geben versucht, früher durch Ampèresche Molekularströme, neuerdings durch umlaufende Elektronen. Die Molekulartheorien oder Elektronentheorien des Magnetismus haben zu zeigen, daß durch Mittelwertsbildung über die Felder der im Raume angenommenen Stromsysteme wirklich das Feld $\mathfrak{B}$ entsteht. Sie haben ferner von dem Zusammenhange des Vektors $\mathfrak{H}$ mit dem beobachtbaren elektrischen Strome Rechenschaft zu geben. Ein Eingehen auf diese Theorien liegt indessen außerhalb des Rahmens dieses Bandes.

Die Ausführung des gegebenen Bildes, welche sich das Feld der Magnete im Äther vorstellt und die Wirbel von $\mathfrak{B}$ auf verborgene Elektrizitätsbewegungen zurückführt, erklärt die quellenfreie Natur von $\mathfrak{B}$ ohne weiteres. Sie verdient daher den Vorzug vor der entsprechenden Ausführung des im vorigen Paragraphen gegebenen Bildes, welche im Äther Quellen von $\mathfrak{B}$ annehmen mußte. Die Auffassung, welche wahren Magnetismus überhaupt ausschließt, muß jedenfalls dieses Bild für naturgetreuer halten als jenes erste. Es entsteht nun die Aufgabe, zu zeigen, daß dieses zweite Bild die mechanischen Kräfte zwischen permanenten Magneten richtig wiedergibt.

Wir gehen auf den Ausdruck (255b) für die Änderung der magnetischen Energie der permanent magnetisierten Körper zurück:

$$dT = \frac{1}{4\pi}\int dv\,\mathfrak{H}\,d\mathfrak{B}.$$

Nun ist
$$\mathfrak{H}\,d\mathfrak{B} = d(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) - \mathfrak{B}\,d\mathfrak{H},$$

daher die Energieänderung bei einer Verschiebung der starren

Magnete gegeneinander

$$dT = \frac{1}{4\pi} d \int dv\,(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) - \frac{1}{4\pi} \int dv\,\mathfrak{B}\,d\mathfrak{H}. \tag{261}$$

Nun war aber bereits im ersten Abschnitte der Satz bewiesen worden (§ 23): das über den ganzen Raum erstreckte Integral des inneren Produktes aus einem quellenfreien und einem wirbelfreien Vektor ist Null. Dieser Satz ist hier anwendbar, da $\mathfrak{H}$ durchweg wirbelfrei, $\mathfrak{B}$ aber durchweg quellenfrei ist. Er ergibt

$$\int dv\,(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) = 0, \tag{261a}$$

und daher

$$dT = -\frac{1}{4\pi} \int dv\,\mathfrak{B}\,d\mathfrak{H}. \tag{261b}$$

Ferner ist im Innern der permanent magnetisierten Körper, wo $\mathfrak{M}$ für jedes Stück als konstant gilt, nach (257a)

$$d\mathfrak{H} = d\mathfrak{B};$$

dasselbe gilt im umgebenden Raume. Wir können daher für die Energieänderung schreiben

$$dT = -d \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{B}^2. \tag{261c}$$

Verstehen wir nun unter T_0 die Energie bei einer bestimmten Anfangslage der Magnete, wo die magnetische Induktion $\mathfrak{B}_0$ sein mag, so bestimmt

$$T - T_0 = -\int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{B}^2 + \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{B}_0{}^2 \tag{262}$$

die Feldenergie bei einer beliebigen Konfiguration der Magnete. Dieser Energieausdruck tritt dem Ausdrucke (258) des vorigen Paragraphen als gleichberechtigt gegenüber. Wie jener dem ersten Bilde entsprach, so entspricht dieser dem zweiten Bilde.

Wir setzen

$$T_m = \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{B}^2. \tag{262a}$$

Dieses ist die magnetische Energie des Feldes, das entsteht, wenn wir die freie Strömung $\mathbf{i}'$ durch eine wahre Strömung im leeren Raume ersetzt denken. Die bewegenden Kräfte, welche elektrische Ströme aufeinander ausüben, sind nun im § 64 all-

gemein aus einem elektrodynamischen Potentiale abgeleitet worden, welches der negativen magnetischen Energie gleich ist. Die elektrodynamischen Kräfte streben die Stromkreise so zu stellen, daß die magnetische Energie bei konstant gehaltenen Stromstärken möglichst groß wird. Denken wir uns nun die freie Strömung **i**′, die ja bei einer Bewegung der Magnete unveränderlich an ihren Stücken haftet, durch eine wahre Strömung ersetzt, so haben wir die Arbeit der zwischen den Strömen wirksamen Kräfte der Zunahme von T_m bei konstant gehaltener Stromdichte gleichzusetzen. Die folgerichtige Durchführung der in diesem Paragraphen gegebenen Darstellung führt also dazu, die Arbeit der zwischen den Magneten wirksamen Kräfte der Zunahme von T_m gleichzusetzen. Die Zunahme der magnetischen Energie T_m (262a) des vorgestellten Feldes im leeren Raume ist jedoch gleich der Abnahme der wirklichen Energie, nach Gleichung (262). Wir gelangen also auch vom Standpunkte dieses zweiten Bildes aus, wie von dem des ersten Bildes dazu, aus der wirklichen Feldenergie der permanenten Magnete wie aus einer potentiellen Energie die zwischen ihnen wirkenden mechanischen Kräfte abzuleiten. Ein Widerspruch zwischen den beiden Bildern besteht hinsichtlich der bewegenden Kräfte nicht, sondern die beiden Ausdrücke für die potentielle Energie ergeben dieselben Kräfte.

Die Kräfte und Kräftepaare, welche zwischen zwei magnetischen Schalen wirken, sind den Kräften und Kräftepaaren gleich, welche die beiden äquivalenten linearen, längs der Randkurve fließenden Ströme aufeinander ausüben. Jede Schale sucht sich so zu stellen, daß möglichst viele der von der anderen Schale entsandten Kraftlinien sie in positivem Sinne durchsetzen; als positiv ist dabei diejenige Richtung bezeichnet, die sich der Richtung des fingierten Stromes durch die Ampèresche Regel zuordnet; dies ist die Magnetisierungsrichtung der Schale. Das elektrodynamische Potential der beiden fingierten Ströme ist dem negativ genommenen Teile der magnetischen Energie gleich, der dem Produkte der beiden Stromstärken $J_1' J_2'$ pro-

portional ist. Nach § 64, Gleichung (193) ist dieses Potential

$$(262\text{b}) \qquad \Psi_{12} = -\frac{J_1' J_2'}{c^2} \int\!\!\int \frac{d\mathfrak{s}_1\, d\mathfrak{s}_2}{r_{12}}.$$

Dieser Ausdruck spielt für die Wechselwirkung der beiden Schalen die Rolle der potentiellen Energie.

Für beliebige Verteilung der Magnetisierung hat man die Wechselwirkung der Magnete auf Grund des allgemeineren Energieausdruckes (184d) zu berechnen, d. h. aus einem Potentiale der Wechselwirkung

$$(262\text{c}) \qquad \Psi = -T_m = -\frac{1}{c^2} \int\!\!\int \frac{dv_1\, dv_2\, \mathfrak{i}_1'\, \mathfrak{i}_2'}{r_{12}},$$

wobei die Integration über alle Paare je zweier Magnetstücke zu erstrecken ist und $\mathfrak{i}_1'$, $\mathfrak{i}_2'$ sich gemäß (259c) aus der Magnetisierung berechnen; man kann auch schreiben

$$(262\text{c}) \qquad \Psi = -T_m = -\int\!\!\int \frac{dv_1\, dv_2}{r_{12}} (\operatorname{curl} \mathfrak{M}_1, \operatorname{curl} \mathfrak{M}_2).$$

Dieser Ausdruck bildet das Gegenstück des Ausdruckes (258c) des ersten Bildes, der nach (257c) übergeht in

$$(262\text{d}) \qquad U_m = \int\!\!\int \frac{dv_1\, dv_2}{r_{12}} \operatorname{div} \mathfrak{M}_1 \operatorname{div} \mathfrak{M}_2.$$

Beide Ausdrücke sind der Fernwirkungsanschauung angepaßt; der Ausdruck für U_m zeigt Fernkräfte zwischen den Quellpunkten, der Ausdruck für T_m Fernkräfte zwischen den Wirbelstücken der permanenten Magnetisierung an. Beide Ausdrücke lassen erkennen, daß für die Wechselwirkungen zweier permanenter Magnete das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung gilt. Denn es hängt die Arbeit der wechselseitigen Kräfte bei der Verrückung immer nur von der Änderung der relativen Lage der Magnetstücke ab. Verschieben sich zwei Magnete, ohne ihre relative Lage zu ändern, so ist die Summe der virtuellen Arbeiten Null. Es wirkt also im ganzen keine resultierende Kraft und kein Kräftepaar, d. h. die Kräfte und Kräftepaare, welche die beiden Magnete aufeinander ausüben, sind entgegengesetzt gleich.

§ 84. Die mechanischen Kräfte zwischen permanenten Magneten und elektrischen Strömen.

Wir denken uns im Felde eine Anzahl permanenter Magnete und außerdem, räumlich von jenen getrennt, eine Anzahl elektrischer Ströme. Die Stromleiter sollen wie starre Körper beweglich sein. Außerhalb der Magnete soll die Permeabilität μ durchweg gleich 1 sein, so daß außer der permanenten Magnetisierung der magnetisch harten Körper eine veränderliche Magnetisierung magnetisch weicher Körper nicht in Frage kommt. Die Wechselwirkungen der Magnete unter sich und der Ströme unter sich kennen wir jetzt. Welche Kräfte übt nun aber ein Strom auf einen Magneten und ein Magnet auf einen Strom aus?

Was zunächst die Wirkung auf einen Magneten (M_2) anbelangt, so können wir den Strom (J_1) ersetzen durch den äquivalenten Magneten (M_1). Denn dieser erzeugt ja überall die gleiche magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ wie der Strom; die Wirkung auf (M_2) ist aber durch $\mathfrak{B}$ bestimmt, indem jeder Stromfaden des fingierten Stromsystemes (J_2'), das (M_2) ersetzt, einen möglichst großen Induktionsfluß zu umschlingen sucht. Die Potentialfunktion der Wirkung, die J_1 auf M_2 ausübt, wird erhalten, indem man in (262c) an Stelle der Dichte $\mathfrak{i}_1'$ des in (M_1) zu fingierenden Stromes die Dichte $\mathfrak{i}_1$ des in (J_1) wirklich fließenden setzt; sie ist

$$-\frac{1}{c^2}\int\int\frac{dv_1\,dv_2\,\mathfrak{i}_1\,\mathfrak{i}_2'}{r_{12}}.$$

Andererseits können wir bezüglich der Gegenwirkung auf den Strom (J_1) den Magneten (M_2) durch das äquivalente Stromsystem (J_2') ersetzen, welches überall dasselbe $\mathfrak{B}$ erzeugt. Denn durch das Feld $\mathfrak{B}$ sind die Kräfte bestimmt, die auf (J_1) wirken. Wir erhalten demnach das Potential der Wirkung, die M_2 auf J_1 ausübt, indem wir, in dem Ausdrucke des elektrodynamischen Potentials zweier Stromsysteme J_1 und J_2, an Stelle von J_2 das System J_2' setzen, welches dem Magneten M_2 äquivalent ist. Dieses Potential ist

$$-\frac{1}{c^2}\int\int\frac{dv_1\,dv_2\,\mathfrak{i}_1\,\mathfrak{i}_2'}{r_{12}}.$$

Aus der Änderung, welche das Potential der Wechselwirkung bei einer virtuellen Verrückung erfährt, berechnen sich die Kräfte; demnach folgt erstens: Auf einen Magneten übt ein Strom die gleichen Kräfte aus wie der äquivalente Magnet. Zweitens: Auf einen Strom übt ein Magnet die gleichen Kräfte aus wie der äquivalente Strom. Drittens endlich folgt aus der Gleichheit der obigen Potentialausdrücke für die Wirkung des Stromes auf den Magneten einerseits, die Gegenwirkung des Magneten auf den Strom andererseits: Die Kräfte und Drehkräfte, welche ein Strom und ein Magnet aufeinander ausüben, erfüllen das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung. Es kann daher ein aus einem Magneten und einem fest verbundenen Strome bestehendes System sich nicht selbst eine Beschleunigung erteilen.

Da nicht nur für die Wechselwirkung von Magneten untereinander und von Strömen untereinander das dritte Newtonsche Axiom gilt, sondern auch für die Wechselwirkung von Magneten und Strömen, so können wir schließen: von einem Magneten oder einem Strome werden auf einen Magneten die gleichen Kräfte ausgeübt wie auf den äquivalenten Strom. In der Tat, es üben, wie bewiesen, Magnet (M_1) und äquivalenter Strom (J_1) auf einen Magneten (M_2) die gleichen Wirkungen aus. Diesen Wirkungen entgegengesetzt gleich sind die Gegenwirkungen, die auf den Magneten (M_1) bzw. den äquivalenten Strom (J_1) von dem Magneten (M_2) ausgeübt werden. Die Kräfte und Drehkräfte, die (M_2) auf (M_1) und auf den äquivalenten Strom (J_1) ausübt, sind daher untereinander gleich. Dasselbe gilt von den Kräften und Drehkräften, die ein Strom (J_2) auf (M_1) und den äquivalenten Strom (J_1) ausübt. Wir können also allgemein den Satz aufstellen: die Kräfte, die an einem Magneten und einem äquivalenten Strome in einem beliebigen magnetischen Felde angreifen, sind einander im Sinne der Mechanik starrer Körper äquivalent. Wir sind demnach imstande, in jeder Hinsicht von den bewegenden Kräften, welche permanente Magnete ausüben, und welche an ihnen angreifen, Rechenschaft zu geben, indem

wir das System freier Strömungen, welches der remanenten Magnetisierung entspricht, durch wahre elektrische Ströme ersetzt denken.

§ 85. Eingeprägte magnetische Kräfte.

Wir dürfen uns nicht verhehlen, daß die Theorie des Ferromagnetismus noch große Schwierigkeiten bietet. Eine vollkommene Theorie müßte es gestatten, die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ zu finden, wenn das Feld $\mathfrak{H}$ und seine Vorgeschichte bekannt sind. Von einer solchen Theorie sind wir noch weit entfernt.

Von O. Heaviside ist eine Darstellung der Theorie der magnetischen Härte gegeben worden, welche auf der Annahme eingeprägter magnetischer Kräfte beruht. Ähnlich, wie sich die gesamte elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$, welche in Leitern einen Strom erregt, in zwei Teilvektoren zerlegt, nämlich die im stationären Felde wirbelfreie „elektrostatische" Kraft $\mathfrak{E}^s$ und die eingeprägte elektrische Kraft $\mathfrak{E}^e$, setzt Heaviside, indem er sich von der Analogie der elektrischen und magnetischen Größen (§ 53) leiten läßt:

$$(263) \qquad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^s + \mathfrak{H}^e.$$

Dabei soll die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ quellenfrei sein:

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

In permanenten Strömen, die nicht von elektrischen Strömen durchflossen werden, soll die „magnetostatische Kraft" $\mathfrak{H}^s$ wirbelfrei sein: $\operatorname{curl} \mathfrak{H}^s = 0$.

Nach dieser Auffassung ist es das Auftreten der „eingeprägten magnetischen Kraft" $\mathfrak{H}^e$, welches die magnetisch harten Körper kennzeichnet. Das Problem der permanenten Magnetisierung würde dann darauf zurückgeführt sein, die Verteilung und die Eigenschaften dieses Vektors zu ermitteln.

Eine ähnliche Darstellungsweise ist von R. Gans befürwortet worden; er glaubt durch die Annahme, daß sowohl μ wie $\mathfrak{H}^e$ nahezu konstant sind, das Verhalten permanenter Magnete bei kleinen, reversiblen Änderungen beschreiben zu können. Auf

Grund dieser Annahme würden die Feldgleichungen für ruhende ferromagnetische Körper die Form annehmen:

$$\text{(263 a)} \qquad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl}\{\mathfrak{H} - \mathfrak{H}^e\} - \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E},$$

$$\text{(263 b)} \qquad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\},$$

$$\text{(263 c)} \qquad \operatorname{div} \mu\mathfrak{H} = 0.$$

Die Vektoren

$$\mathfrak{E}^s = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e, \qquad \mathfrak{H}^s = \mathfrak{H} - \mathfrak{H}^e$$

sind es, deren Tangentialkomponenten sich an der Grenzfläche zweier Körper — von vollkommenen Leitern abgesehen — stetig verhalten. Sie bestimmen den Poyntingschen Strahlvektor

$$\text{(263 d)} \qquad \mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}^s\mathfrak{H}^s] = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e, \mathfrak{H} - \mathfrak{H}^e],$$

so daß die Stetigkeit des senkrechten Energiestromes durch die Trennungsfläche zweier Körper hindurch gesichert ist.

Wir stellen, ähnlich wie in § 81, aber indem wir jetzt die Arbeit der eingeprägten elektrischen Kräfte berücksichtigen, die Energiegleichung auf:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dT}{dt} - \frac{dA}{dt} + Q + Q_m = -\int df\mathfrak{S}_n,$$

und setzen rechts unter Anwendung des Gaußschen Satzes und der Formel (102a):

$$-\int df\mathfrak{S}_n = -\int dv \operatorname{div}\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}\int dv\,\{\mathfrak{E}^s \operatorname{curl}\mathfrak{H}^s - \mathfrak{H}^s \operatorname{curl}\mathfrak{E}^s\}.$$

In dem letzten Ausdruck führen wir, an Stelle von

$$\operatorname{curl}\mathfrak{E}^s = \operatorname{curl}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} \quad \text{und} \quad \operatorname{curl}\mathfrak{H}^s = \operatorname{curl}\{\mathfrak{H} - \mathfrak{H}^e\},$$

die durch die Feldgleichungen (263a, b) gegebenen Werte ein und trennen dann die von den elektrischen Vektoren abhängigen Größen von denjenigen, welche durch die magnetischen Vektoren bestimmt sind; so ergeben sich die beiden Beziehungen

$$\frac{dU}{dt} - \frac{dA}{dt} + Q = \int dv\left(\mathfrak{E}^s, \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \sigma\mathfrak{E}\right),$$

$$\text{(263 e)} \qquad \frac{dT}{dt} + Q_m = \int dv\left(\mathfrak{H}^s, \frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right) = \frac{1}{4\pi}\int dv\,\mathfrak{H}^s\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}.$$

Über die erste, elektrische Energiebeziehung hatten wir uns bereits in § 60 verbreitet, insbesondere über den durch die eingeprägten elektrischen Kräfte vermittelten chemischen oder thermischen Energieumsatz. Die eingeprägten magnetischen Kräfte bedingen, da es keinen magnetischen Strom gibt, keinen derartigen Energieumsatz — abgesehen von der durch Q_m ausgedrückten Hysteresiswärme —, so daß ein als Arbeitsleistung dieser Kräfte zu deutendes Glied in (263e) nicht einzuführen war. Wird diese als Verallgemeinerung von (254) anzusprechende Gleichung auf reversible, d. h. von magnetischer Wärmeentwicklung Q_m freie Vorgänge angewandt, so bestimmt

$$dT = \frac{1}{4\pi}\int dv\, \mathfrak{H}^s d\mathfrak{B} \tag{263f}$$

die Änderung der magnetischen Energie.

Sind nun wirklich für jedes Eisenstück μ und $\mathfrak{H}^e$ während des betreffenden Vorganges unveränderliche Größen, so folgt aus (263) für die Energieänderung der Volumeinheit

$$\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}^s d\mathfrak{B} = \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}^s d\mathfrak{H}^s = d\left\{\frac{\mu}{8\pi}{\mathfrak{H}^s}^2\right\}.$$

Diese Formel gilt auch außerhalb der permanenten Magnete, wo $\mathfrak{H}^e$ gleich Null zu setzen ist.

Für den Energieunterschied zweier verschiedener Lagen des, etwa aus zwei permanenten Magneten bestehenden, Systemes folgt demnach

$$T - T_0 = \int dv\, \frac{\mu}{8\pi}{\mathfrak{H}^s}^2 - \int dv\, \frac{\mu}{8\pi}{\mathfrak{H}^s_0}^2 . \tag{263g}$$

Da der wirbelfreie Vektor $\mathfrak{H}^s$ es ist, der hier die magnetische Energie bestimmt, so entspricht dieser Energieausdruck dem ersten Bilde (§ 82); er ist eine Verallgemeinerung des Ausdruckes (258). Man kann hier die potentielle Energie der Wechselwirkung von Magneten auf die Formen bringen

$$U_m = \int dv\, \frac{\mu}{8\pi}{\mathfrak{H}^s}^2 = -\int dv\, \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^s \nabla \varphi_m = \frac{1}{2}\int dv\, \varphi_m \varrho_m ,$$

wo gesetzt ist:

$$4\pi\varrho_m = \operatorname{div} \mu\mathfrak{H}^s = -\operatorname{div} \mu\mathfrak{H}^e$$

Dem zweiten Bilde (§ 83) dagegen entspricht der Energieausdruck, der aus der Gleichung

$$dT = -\frac{1}{4\pi}\int dv\,\mathfrak{B}\,d\mathfrak{H}^s$$

abzuleiten ist. Dieser Wert der Energieänderung erweist sich als gleichwertig mit (263f), wenn man beachtet, daß das Volumintegral des skalaren Produktes aus dem quellenfreien Vektor $\mathfrak{B}$ und dem wirbelfreien Vektor $\mathfrak{H}^s$ gleich Null ist:

$$\int dv\,\mathfrak{B}\mathfrak{H}^s = 0.$$

Mit Rücksicht auf (263) folgt für die Energieänderung der Volumeinheit

$$-\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\,d\mathfrak{H}^s = -\frac{1}{4\pi\mu}\mathfrak{B}\,d\mathfrak{B} = -d\left\{\frac{1}{4\pi\mu}\mathfrak{B}^2\right\},$$

und es wird der Energieunterschied zweier Konfigurationen des Systemes der Magnete

$$T - T_0 = -\int\frac{dv}{8\pi\mu}\mathfrak{B}^2 + \int\frac{dv}{8\pi\mu}\mathfrak{B}_0^2; \tag{263h}$$

diese Formel ist als Verallgemeinerung von (262) zu bezeichnen. Entsprechend wie im § 83 fassen wir diesen Ausdruck für die potentielle Energie der Wechselwirkung permanenter Magnete als elektrodynamisches Potential eines fingierten Stromsystemes auf, von der magnetischen Energie:

$$T_m = \int\frac{dv}{8\pi\mu}\mathfrak{B}^2 = \int\frac{dv}{8\pi\mu}\mathfrak{B}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A} = \frac{1}{2c}\int dv(\mathbf{i}\mathfrak{A}).$$

Dabei ist die fingierte Stromdichte bestimmt durch

$$\frac{4\pi\mathbf{i}}{c} = \mathrm{curl}\left\{\frac{\mathfrak{B}}{\mu}\right\} = \mathrm{curl}\,\mathfrak{H}^e.$$

Wird $\mu = 1$ gesetzt, so geht die soeben angedeutete Darstellung in die oben, in den §§ 82—84, dargelegte über; dabei geht $\mathfrak{H}^s$ in die dort mit $\mathfrak{H}$ bezeichnete, wirbelfreie Feldstärke über, während $\mathfrak{H}^e$ mit dem dort als konstant angenommenen Vektor $4\pi\mathfrak{M}$ zusammenfällt. Wie jene Darstellung, so ist auch diese auf umkehrbare, von Hysteresis freie Vorgänge beschränkt.

Zweites Kapitel.

Induktionserscheinungen in bewegten Körpern.

§ 86. Induktion durch Bewegung zweier Stromringe.

Im vorigen Abschnitte haben wir ausschließlich Vorgänge in ruhenden Körpern behandelt. Eine Bewegung der Körper haben wir nicht in Betracht gezogen. Wir gehen nunmehr dazu über, die Induktionserscheinungen in bewegten Körpern zu erörtern.

Wir knüpfen zunächst an die im § 63 behandelte Aufgabe an, die Induktionswirkungen in einem aus zwei Stromringen bestehenden Systeme zu ermitteln. Wir fanden (186a, b) für den Induktionsfluß durch eine vom ersten Ringe umschlungene Fläche:

$$\Phi_1 = \frac{1}{c} L_{11} J_1 + \frac{1}{c} L_{12} J_2 ,$$

und für den vom zweiten Ringe umschlungenen Induktionsfluß:

$$\Phi_2 = \frac{1}{c} L_{12} J_1 + \frac{1}{c} L_{22} J_2 .$$

Wir leiteten aus dem Faradayschen Induktionsgesetze (179) die induzierten elektromotorischen Kräfte ab; dabei beschränkten wir die Betrachtung auf diejenigen elektromotorischen Kräfte, die in ruhenden, starren Stromringen durch Änderungen der Stromstärken induziert werden. Änderungen der relativen Lage und der Form der Stromringe haben wir nicht in Betracht gezogen.

Das Faradaysche Induktionsgesetz (179) gilt nun aber auch für bewegte Stromkreise. Es setzt allgemein die induzierte elektromotorische Kraft der zeitlichen Abnahme des umschlungenen Induktionsflusses proportional. Auf Grund dieses durch die Erfahrung bestätigten Gesetzes erhalten wir für die induzierten elektromotorischen Kräfte

$$(264) \quad \begin{cases} -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{11}J_1) - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12}J_2), \\ -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12}J_1) - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{22}J_2). \end{cases}$$

Es entstehen somit induzierte elektromotorische Kräfte nicht nur

durch Änderungen der Stromstärken J_1, J_2, sondern auch durch Änderungen der Koeffizienten der gegenseitigen Induktion und der Selbstinduktion. Durch eine relative Bewegung der beiden starren Stromleiter wird allerdings nur L_{12} geändert; hat man es aber etwa mit biegsamen stromführenden Bändern zu tun, so hat man auch die Veränderlichkeit der Selbstinduktionskoeffizienten L_{11} und L_{22} zu beachten.

Durch Einführung der Ausdrücke (264) in das Induktionsgesetz (179) ergeben sich die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} J_1 R_1 - E_1^e &= -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{11}J_1) - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12}J_2), \\ J_2 R_2 - E_2^e &= -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12}J_1) - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{22}J_2). \end{aligned}\right. \tag{265}$$

Dieselben gelten für quasistationäre Strömung und für hinreichend langsame Bewegungen der Stromleiter.

Für solche Bewegungen ist nun die Arbeit der mechanischen Kräfte leicht anzugeben. Wir haben im § 64 gesehen, daß diese Kräfte für ruhende Leiter sich aus der Zunahme der magnetischen Energie berechnen, indem die negative magnetische Energie die Rolle des elektrodynamischen Potentiales spielt. Es ist aber wohl zu beachten, daß diejenige Zunahme der magnetischen Energie in Rechnung zu setzen ist, die stattfindet, wenn die Stromstärken konstant gehalten werden. Die Arbeit der elektrodynamischen Kräfte bei einer virtuellen Verrückung oder Formänderung der linearen Leiter beträgt (vgl. 195a):

$$\delta A = \delta T = \frac{1}{2c^2} J_1^2 \delta L_{11} + \frac{1}{c^2} J_1 J_2 \delta L_{12} + \frac{1}{2c^2} J_2^2 \delta L_{22}.$$

Bei hinreichend langsamer Bewegung, d. h. solange die Geschwindigkeit der Bewegung nicht merklich das magnetische Feld und die Feldenergie beeinflußt, werden die elektrodynamischen Kräfte die gleichen sein, die in der jeweils eingenommenen Lage auf den ruhenden Leiter wirken würden. Die Arbeit, welche diese Kräfte bei einer solchen Bewegung leisten, wird dann

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2c^2} J_1^2 \frac{dL_{11}}{dt} + \frac{1}{c^2} J_1 J_2 \frac{dL_{12}}{dt} + \frac{1}{2c^2} J_2^2 \frac{dL_{22}}{dt}. \tag{266}$$

Werden die Stromstärken wirklich konstant gehalten, so ist

diese Arbeitsleistung der Zunahme der Feldenergie gleich. Ändern sich aber bei der wirklichen Bewegung die Stromstärken, so gilt für die Zunahme der durch (186) bestimmten Feldenergie der allgemeinere Ausdruck:

$$(266\,a)\quad \begin{cases} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{c^2}\Big\{J_1 L_{11}\frac{dJ_1}{dt} + \frac{1}{2}J_1^2\frac{dL_{11}}{dt} + J_1 L_{12}\frac{dJ_2}{dt} + J_2 L_{12}\frac{dJ_1}{dt} \\ \qquad + J_1 J_2\frac{dL_{12}}{dt} + J_2 L_{22}\frac{dJ_2}{dt} + \frac{1}{2}J_2^2\frac{dL_{22}}{dt}\Big\}. \end{cases}$$

Die Summe aus der pro Sekunde von den elektrodynamischen Kräften geleisteten Arbeit (266) und aus der Zunahme der Energie (266a) ist

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = \frac{1}{c^2}\Big\{J_1\frac{d(L_{11}J_1)}{dt} + J_1\frac{d(L_{12}J_2)}{dt} + J_2\frac{d(L_{12}J_1)}{dt} + J_2\frac{d(L_{22}J_2)}{dt}\Big\}.$$

Mit Rücksicht auf (265) erhält man

$$(267)\qquad \frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = J_1 E_1^e + J_2 E_2^e - J_1^2 R_2 - J_1^2 R_2 .$$

Die von den eingeprägten elektromotorischen Kräften chemischen oder thermischen Ursprungs geleistete Arbeit liefert, soweit sie nicht als Joulesche Wärme in dem Leiter verzehrt wird, diejenige Energie, welche erforderlich ist, um gleichzeitig die mechanische Arbeit (266) zu leisten und die magnetische Energie um den Betrag (266a) zu vermehren. Damit ist der Nachweis geführt, daß das Energieprinzip von den angenommenen elektromotorischen und bewegenden Kräften erfüllt ist. Das kann nicht wundernehmen, da ja nach § 65 diese Kräfte sich aus den Lagrangeschen Gleichungen ableiten ließen und die Energiegleichung für alle diejenigen Systeme gilt, welche den Lagrangeschen Gleichungen genügen.

Wir denken uns beispielsweise zwei starre Stromkreise in parallelen Ebenen einander gegenübergestellt und in gleichem Sinne von Strömen durchflossen. Bei einer Annäherung der Stromringe leisten die anziehenden elektrodynamischen Kräfte Arbeit, und gleichzeitig nimmt die magnetische Feldenergie zu. Die infolge der Bewegung induzierten elektromotorischen Kräfte wirken in einem der Richtung des betreffenden Stromes entgegengesetzten

Sinne. Um die Stromstärken konstant zu halten, müßten somit die eingeprägten elektromotorischen Kräfte verstärkt werden; dieselben würden dann eine entsprechende Arbeit über das zur Lieferung der Jouleschen Wärme erforderliche Maß hinaus leisten. Diese Arbeit würde zum Teil in mechanische Arbeit, zum Teil in magnetische Energie verwandelt werden. In Wirklichkeit sind indessen die eingeprägten Kräfte konstant, nicht die Stromstärken. Die Stromstärken werden also durch die induzierte elektromotorische Kraft zeitweise geschwächt, wodurch der Vorgang sich verwickelt.

Wir sehen, daß die durch Bewegung induzierten elektromotorischen Kräfte und die mechanischen Kräfte in enger Beziehung zueinander stehen. Dieser durch das Energieprinzip vermittelte Zusammenhang besteht selbstverständlich auch in allgemeineren Fällen. Die verschiedenen Theorien der Elektrodynamik bewegter Körper können, wenn sie bezüglich der durch Bewegung erregten Felder sich unterscheiden, nicht umhin, auch für die mechanischen Kräfte verschiedene Annahmen zu machen. Von den in diesem Paragraphen dargelegten Wechselwirkungen zweier bewegter Stromringe, die in dem angegebenen Gültigkeitsbereiche von der Erfahrung durchweg bestätigt werden, müssen indessen alle Theorien Rechenschaft geben, wenn sie auch sonst voneinander abweichen mögen.

§ 87. Die Magnetinduktion.

Wir gehen jetzt zur Behandlung des Falles über, wo durch einen linearen Leiter ein permanenter Magnet Induktionsfluß hindurchsendet. Auch hier setzt das Faradaysche Induktionsgesetz die induzierte elektromotorische Kraft der zeitlichen Abnahme des umschlungenen Induktionsflusses proportional. Wir wollen, um den Vergleich zwischen den Entwicklungen dieses Paragraphen und denen des vorigen zu erleichtern, als Magneten eine magnetische Schale wählen; ihr magnetisches Moment nehmen wir, entsprechend der Auffassung der §§ 82—84, als konstant an. Wir bezeichnen mit J_1' die Stromstärke des längs der Umfangslinie zu fingierenden Stromes, welcher der Schale äquivalent ist

(vgl. § 83). Der gesamte Induktionsfluß durch eine vom Strome J_2 umrandete Fläche hindurch ist dann

$$\Phi_2 = \frac{1}{c} L_{12} J_1' + \frac{1}{c} L_{22} J_2 ;$$

aus dem Induktionsgesetz folgt daher als induzierte elektromotorische Kraft im Stromringe

$$-\frac{1}{c}\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{1}{c^2} J_1' \frac{dL_{12}}{dt} - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{22} J_2). \tag{268}$$

In der Tat, die fingierte Stromstärke J_1' des den Magneten ersetzenden Stromes ist konstant, weil durch die permanente Magnetisierung bestimmt. Eine Induktion im Stromringe kann daher nur durch eine Änderung der relativen Lage des Magneten und des Stromes stattfinden. Dazu tritt dann die im zweiten Gliede enthaltene elektromotorische Kraft der Selbstinduktion, herrührend von Stromschwankungen im Stromringe selber oder von einer Formänderung desselben.

Was nun die bewegenden Kräfte anbelangt, so sind diese ohne weiteres anzugeben. Wissen wir doch aus den Entwicklungen des § 84, daß die magnetische Schale hinsichtlich der ausgeübten Kräfte sowohl wie hinsichtlich derjenigen Kräfte, die sie erleidet, dem linearen Strome J_1' im Sinne der Mechanik starrer Körper äquivalent ist. Wir erhalten demnach die Arbeit, welche die mechanischen Kräfte bei einer langsamen Bewegung des Stromes bzw. des starren Magneten leisten, indem wir in (266) an Stelle von J_1 jetzt J_1' setzen. Dabei ist zu beachten, daß L_{11}, die Größe, welche dem Selbstinduktionskoeffizienten des äquivalenten Stromes entsprechen würde, für den Magneten als starren Körper konstant ist. Es ist demnach

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{c^2} J_2 \left(J_1' \frac{dL_{12}}{dt} + \frac{1}{2} J_2 \frac{dL_{22}}{dt} \right) \tag{268a}$$

die Arbeitsleistung der mechanischen Kräfte, die zwischen dem Magneten und dem Strome wirksam sind.

Wir müssen nun, um das Energieprinzip auch für die Magnetinduktion als gültig nachzuweisen, die Feldenergie des Systemes bestimmen, das von dem Strome und dem Magnete gebildet wird. Wir haben zwar die Energie eines nur aus elektrischen Strömen

oder nur aus Magneten bestehenden Systemes berechnet. Aber gerade die hier vorliegende Aufgabe haben wir bisher noch nicht gelöst.

Wir knüpfen, um ihre Lösung zu ermitteln, am besten an die Entwicklungen des § 82 an. Wir haben dort für die Änderung der Energiedichte im Innern eines magnetisch harten Körpers gefunden

$$\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\,d\mathfrak{B} = \frac{1}{8\pi}d\mathfrak{H}^2.$$

Derselbe Ausdruck gilt in dem umgebenden Raume und auch in dem Stromleiter, wenn die Permeabilität daselbst gleich 1 ist. Wir wollen dies annehmen. Dann gilt auch hier die Gleichung (258), welche die Feldenergie T bis auf eine Konstante bestimmt; wir setzen

$$T = \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}^2 + \text{const.} \tag{268b}$$

Das Feld $\mathfrak{H}$ ist im Magneten wirbelfrei (Gl. 256), im Stromleiter ist es quellenfrei, da $\mu = 1$ und $\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$ ist. Im übrigen Teile des Feldes ist es sowohl quellenfrei wie wirbelfrei. Wir können es daher in der im § 23 dargelegten Weise in ein wirbelfreies Feld $\mathfrak{H}'$ und ein quellenfreies Feld $\mathfrak{H}''$ zerlegen; $\mathfrak{H}'$ ist das vom Magneten allein, $\mathfrak{H}''$ das vom Strome allein erregte Feld; durch Überlagerung dieser beiden Felder entsteht das wirkliche Feld; aus den Entwicklungen des § 23 geht nun hervor, daß allgemein

$$\int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}^2 = \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}'^2 + \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}''^2$$

gilt. Es folgt daher

$$T = T' + T'', \tag{268c}$$

wo T' die konstante Energie des Magneten allein, bei Abwesenheit des Stromes, ist, während

$$T'' = \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}''^2 = \frac{1}{2c^2}L_{22}J_2^2$$

die Feldenergie des Stromes im leeren Raume ist. Es addieren sich demnach die Energien des permanenten Magneten und des Stromes. Bleibt der Stromring nach Form und Stromstärke ungeändert, so ist die Feldenergie von

der gegenseitigen Lage des Magneten und des Stromes unabhängig.

Wir wollen jetzt prüfen, ob diese Folgerung der Theorie permanenter Magnete mit dem Energieprinzip in Übereinstimmung ist. Wir erhalten für die zeitliche Änderung der Feldenergie, da ja die Energie des Magneten konstant ist:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c^2}\left\{L_{22}J_2\frac{dJ_2}{dt} + \frac{1}{2}J_2^{\,2}\frac{dL_{22}}{dt}\right\}. \tag{268d}$$

Addiert man hierzu die Arbeit der mechanischen Kräfte (268a), so erhält man

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = \frac{1}{c^2}J_2\left\{J_1'\frac{dL_{12}}{dt} + \frac{d}{dt}(L_{22}J_2)\right\}. \tag{268e}$$

Berücksichtigt man den Ausdruck (268) für die induzierte elektromotorische Kraft der Magnetinduktion, so folgt:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = J_2 \cdot \frac{1}{c}\frac{d\Phi_2}{dt}.$$

Da ferner aus dem Induktionsgesetze folgt

$$J_2 R_2 - E_2^e = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_2}{dt},$$

so erhält man schließlich

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = J_2 E_2^e - J_2^{\,2} R_2. \tag{269}$$

Die Arbeit der eingeprägten elektromotorischen Kräfte im Stromringe wird demnach, soweit sie nicht als Joulesche Wärme verzehrt wird, in mechanische Arbeit umgewandelt, bzw. zur Steigerung der magnetischen Feldenergie verwandt. Ein von der relativen Lage des Magneten und des Stromes abhängiger Energieanteil ist dabei nicht angenommen worden. Dennoch genügen die elektromotorischen Kräfte der Magnetinduktion dem Energieprinzip.

Den Entwicklungen dieses Paragraphen liegt, ebenso wie denen des vorigen, die Annahme zugrunde, daß die Bewegungen des Stromes bzw. des Magneten hinreichend langsam erfolgen. Andernfalls wäre es nicht erlaubt, die Feldenergie der Energie des in der betreffenden Konfiguration ruhend verharrenden Systemes gleichzusetzen und die Kräfte denjenigen, welche Magnet

und Strom ruhend aufeinander ausüben würden. Indem wir die Annahme langsamer Bewegung zugrunde legten, haben wir stillschweigend das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung eingeführt, das ja für ruhende Ströme und Magnete allgemein bewiesen worden ist (§ 84). Auch haben wir die mechanischen und ebenso die durch das Energieprinzip mit ihnen verknüpften elektromotorischen Kräfte nur von der relativen Lage der Körper abhängig gemacht. Bei allen in den Gültigkeitsbereich der beiden ersten Paragraphen dieses Kapitels fallenden Vorgängen gilt mithin das sogenannte Relativitätsprinzip im Sinne der Newtonschen Mechanik: es hängen die Vorgänge nur von der relativen Bewegung der Körper ab, eine hinzugefügte gleichförmige Translation des ganzen Systemes ändert weder die bewegenden noch die elektromotorischen Kräfte, welche in dem System wirksam sind. Auch eine gemeinsame Rotation des ganzen Systemes ist ohne Einfluß.

§ 88. Die zweite Hauptgleichung für bewegte Körper.

Im § 59 haben wir aus dem Induktionsgesetz die zweite Hauptgleichung der Elektrodynamik abgeleitet, und zwar zunächst in der auch für bewegte Körper gültigen Form (179a)

$$\oint d\mathfrak{s}\,\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{270}$$

wo

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int df\,\mathfrak{B}_n \tag{270a}$$

die zeitliche Änderung des Induktionsflusses Φ durch eine zum bewegten Körper gehörende, von der Kurve $\mathfrak{s}$ berandete Fläche bedeutet. Wir haben uns indessen dort bei der Berechnung der zeitlichen Änderung von Φ auf den Fall der Ruhe beschränkt. Es handelt sich jetzt darum, die Betrachtung, die zu der differentiellen Form der zweiten Hauptgleichung führt, auf den allgemeinen Fall der Bewegung zu übertragen.

Der Zuwachs (270a), den der Induktionsfluß in der Zeiteinheit erfährt, läßt sich in zwei Teile zerlegen:

(271) $$\frac{d\Phi}{dt} = \left\{\frac{d\Phi}{dt}\right\}_r + \left\{\frac{d\Phi}{dt}\right\}_b .$$

Der erste Teil ist derjenige Zuwachs, der, bei ruhender Fläche f, infolge der zeitlichen Änderung des magnetischen Feldes stattfindet:

(271a) $$\left\{\frac{d\Phi}{dt}\right\}_r = \int df \frac{\partial \mathfrak{B}_n}{\partial t} .$$

Dieser wurde früher allein in Betracht gezogen. Hierzu tritt nun der zweite Teil, welcher den lediglich infolge der Bewegung der dem Körper angehörenden Kurve $\mathfrak{s}$ stattfindenden Zuwachs von Φ angibt; bei seiner Berechnung kann man das magnetische Feld als zeitlich konstant ansehen.

Wir wollen in diesem Paragraphen die Bewegung des Körpers als stetig betrachten, so daß der Zusammenhang der Kurve $\mathfrak{s}$ bei der Bewegung gewahrt bleibt. Bei der im übrigen beliebigen Bewegung ihrer Punkte ändert die Kurve ihre Lage im Raume; der veränderten Lage entspricht, im gleichen Felde, ein veränderter Wert des umschlungenen Induktionsflusses. Zur Berechnung desselben kann man eine beliebige Fläche wählen, die von der Kurve $\mathfrak{s}$, in ihrer neuen Lage, berandet wird; denn infolge der quellenfreien Art des Vektors $\mathfrak{B}$ ist der Induktionsfluß durch zwei Flächen mit derselben Randkurve der gleiche. Wir wählen diejenige Fläche, die aus der ursprünglichen, von $\mathfrak{s}$ in seiner alten Lage berandeten, hervorgeht, indem man den von der Kurve $\mathfrak{s}$ bei ihrer Bewegung beschriebenen Streifen hinzufügt. Der durch die Bewegung der Kurve $\mathfrak{s}$ bedingte Zuwachs an Induktionsfluß ergibt sich so als derjenige Induktionsfluß, der durch diesen Streifen hindurchtritt. Nun beschreibt jedes Stück $d\mathfrak{s}$ der Kurve in der Zeiteinheit ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt, Ebenenstellung und Umlaufssinn durch das äußere Produkt aus Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und $d\mathfrak{s}$ gekennzeichnet ist. Der Induktionsfluß durch dieses Parallelogramm beträgt

$$\mathfrak{B}[\mathfrak{v}\, d\mathfrak{s}] = d\mathfrak{s}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}] .$$

Folglich ist der gesamte Induktionsfluß durch den von der Kurve $\mathfrak{s}$ in der Zeiteinheit beschriebenen Streifen, und daher der gesuchte

durch die Bewegung bedingte Zuwachs des von $\mathfrak{s}$ umschlungenen Induktionsflusses:

$$\left\{\frac{d\Phi}{dt}\right\}_b = \oint d\mathfrak{s}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]. \tag{271b}$$

Für die rechte Seite kann man nach dem Stokesschen Satze ein Flächenintegral setzen, erstreckt über die Fläche f, für welche ursprünglich der Induktionsfluß berechnet wurde; dann wird

$$\left\{\frac{d\Phi}{dt}\right\}_b = \int df \, \{\operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\}_n. \tag{271c}$$

Der gesamte, in der Sekunde stattfindende Zuwachs (271) des Induktionsflusses ergibt sich nun durch Addition von (271a) und (271c)

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int df \left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\right\}_n, \tag{271d}$$

und durch Einführung dieses Ausdruckes nimmt die zweite Hauptgleichung (270) die Form an

$$\oint d\mathfrak{s}\,\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{1}{c}\int df \left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\right\}_n. \tag{271e}$$

Wendet man hier den Stokesschen Satz auf die linke Seite an und geht dann zu unendlich kleinen Flächenstücken über, so erhält man die zweite Hauptgleichung für bewegte Körper in differentieller Form:

$$\operatorname{curl}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\right\}. \tag{272}$$

Wie aus der Ableitung hervorgeht, ist $\mathfrak{v}$ der Geschwindigkeitsvektor der Punkte des bewegten Körpers. Die Geschwindigkeit ist, wenn es sich um ein konstantes magnetisches Feld handelt, am besten auf dasjenige Bezugssystem zu beziehen, von dem aus beurteilt eben das Feld sich als konstant darstellt. Ist das magnetische Feld zeitlich veränderlich, so sind zeitliche Änderung von $\mathfrak{B}$ und Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ auf das nämliche Koordinatensystem zu beziehen. Von dessen Wahl hängen zwar die beiden Bestandteile des Zuwachses Φ, jeder für sich genommen, ab, aber nicht ihre Summe. Daß dem so ist, geht aus der Gl. (270a) hervor, die wir zugrunde gelegt haben; diese enthält überhaupt keine Bezugnahme auf ein bestimmtes Koordinatensystem.

Was über die experimentelle Bestätigung der zweiten Hauptgleichung in § 59 gesagt wurde, gilt auch für bewegte Körper; diese Bestätigung betrifft die in Leitern erzeugten Ströme. Insofern als man den Vektor $\mathfrak{E}$ als Quotienten aus Stromdichte $\mathfrak{i}$ und Leitfähigkeit σ bestimmt, kann man die zweite Hauptgleichung — wenigstens für die praktisch herstellbaren Geschwindigkeiten — auch für bewegte Leiter als tatsächlich zutreffend ansehen. Die Übertragung auf Isolatoren indessen bleibt hypothetisch, es sei denn, daß man die Gl. (272) als Definition für den Wirbel des Vektors $\mathfrak{E}$ betrachtet. Dann entsteht jedoch die Frage, wie der demgemäß bestimmte Vektor $\mathfrak{E}$ für bewegte Isolatoren mit dem Vektor $\mathfrak{D}$ der elektrischen Verschiebung zusammenhängt. Auf diese Frage, die von den verschiedenen neueren Theorien der Elektrodynamik bewegter Körper in verschiedener Weise beantwortet wird, werden wir erst im zweiten Bande eingehen.

Wir wollen den besonderen Fall ins Auge fassen, wo das magnetische Feld konstant ist, also die Induktion nur infolge der Bewegung stattfindet; sehen wir ferner von eingeprägten Kräften ab, so ergibt die zweite Hauptgleichung (272)

$$\operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{curl} [\mathfrak{B}\mathfrak{v}] = \operatorname{curl} \left[\frac{\mathfrak{v}}{c} \mathfrak{B}\right].$$

Die beiden Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\left[\frac{\mathfrak{v}}{c} \mathfrak{B}\right]$

besitzen also die gleichen Wirbel. Daraus folgt, nach § 23, daß ihre Differenz ein wirbelfreier, aus einem skalaren Potential ableitbarer, Vektor ist. Man hat also

$$\mathfrak{E} = \left[\frac{\mathfrak{v}}{c} \mathfrak{B}\right] - \nabla \varphi. \tag{273}$$

Bei der Integration über eine geschlossene Kurve fällt der Gradient des Skalars φ wieder fort, und es wird

$$\oint \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = \oint d\mathfrak{s} \left[\frac{\mathfrak{v}}{c} \mathfrak{B}\right]. \tag{273a}$$

Dieser Ausdruck für die induzierte elektromotorische Integralkraft hätte auch direkt aus dem Induktionsgesetz und aus (271b) abgeleitet werden können.

§ 89. Gleitflächen.

Wir haben uns im vorigen Paragraphen auf die Betrachtung stetiger Bewegungen im magnetischen Felde beschränkt, und haben gesehen, daß solche Bewegungen räumliche Wirbel der elektrischen Feldstärke hervorrufen. Wir gehen jetzt zur Behandlung von Bewegungen über, bei denen die Geschwindigkeit sich an gewissen Flächen sprungweise ändert. Eine solche Unstetigkeitsfläche kann als Trennungsfläche zweier, durch die Ziffern (1) und (2) zu unterscheidender Körper aufgefaßt werden. Die beiden Körper sollen ihren Zusammenhang auch an der Unstetigkeitsfläche nicht verlieren, d. h. die normale Komponente der Geschwindigkeit soll stetig sein. Nur die tangentiellen Komponenten der Geschwindigkeit sollen unstetig sein, derart, daß die Körper längs der Unstetigkeitsfläche aneinander vorbeigleiten. Die Fläche wird dann „Gleitfläche" genannt. An einer Gleitfläche treten, wie jetzt gezeigt werden soll, im magnetischen Felde Flächenwirbel von $\mathfrak{E}$ auf.

Man betrachte zwei Linienstücke $d\mathfrak{s}_1$ und $d\mathfrak{s}_2$, welche den Grenzflächen der Körper (1) und (2) angehören. Dieselben mögen zur Zeit t zusammenfallen, jedoch entgegengesetzten Sinn haben: $d\mathfrak{s}_2 = -d\mathfrak{s}_1$, so daß sie zusammen zur Zeit t ein Flächenstück vom Inhalte Null einschließen. Im Zeitteilchen dt beschreiben die beiden Linienstücke die Parallelogramme

$$[\mathfrak{v}_1 d\mathfrak{s}_1]dt \quad \text{und} \quad [\mathfrak{v}_2 d\mathfrak{s}_2]dt;$$

so ist bei der Gleitbewegung aus dem Parallelogramm vom Inhalte Null zur Zeit t, zur Zeit $t + dt$ ein Parallelogramm geworden, welches nach Inhalt, Stellung und Umlaufssinn gegeben ist durch

$$[\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2, d\mathfrak{s}_1]dt.$$

Da die Faktoren $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2$ und $d\mathfrak{s}_1$ dieses äußeren Produkts Vektoren sind, die tangentiell zur Gleitfläche gerichtet sind, so ist dem Parallelogramm ein zur Gleitfläche senkrechter Vektor zuzuordnen. Demgemäß hängt der Induktionsfluß durch das Parallelogramm

$$d\Phi = \mathfrak{B}[\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2, d\mathfrak{s}_1]dt \tag{274}$$

nur von der Komponente von $\mathfrak{B}$ senkrecht zur Gleitfläche ab; diese Komponente ist stetig, da ja wahrer Magnetismus, der eine Flächendivergenz von $\mathfrak{B}$ bedingen könnte, ausgeschlossen worden ist. Man kann mithin auch schreiben

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathfrak{B}_n \mathfrak{n}[\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2,\ d\mathfrak{s}_1] = \mathfrak{B}_n\{\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2\}[d\mathfrak{s}_1\mathfrak{n}]. \tag{274a}$$

Man stelle sich nun vor, daß die beiden Linienstücke $d\mathfrak{s}_1$ und $d\mathfrak{s}_2$, diesseits und jenseits der Gleitfläche, zusammen zur Zeit t eine geschlossene Kurve bilden; eine ausdehnbare, zwischen ihnen ausgespannte Membran wird in der Zeiteinheit zu dem Parallelogramm, für welches der Induktionsfluß in (274a) erhalten worden ist. Durch die zweite Hauptgleichung ist dieser mit dem Linienintegral von $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e$ — oder, in Abwesenheit eingeprägter Kräfte, von $\mathfrak{E}$ — längs der Randkurve verknüpft; man hat

$$\mathfrak{E}_1 d\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{E}_2 d\mathfrak{s}_2 = (\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2,\ d\mathfrak{s}_1) = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

und, nach (274a)

$$(\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2,\ d\mathfrak{s}_1) = \frac{1}{c}\mathfrak{B}_n\{\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2\}[\mathfrak{n}\,d\mathfrak{s}_1]. \tag{274b}$$

Aus dieser letzten Beziehung, welche für ein beliebiges tangentielles Linienstück $d\mathfrak{s}_1$ gilt, ersieht man, daß in der Tat die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ längs der Gleitfläche sich unstetig verhalten. Schreibt man die linke Seite von (274b)

$$(\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2,\ d\mathfrak{s}_1) = [\mathfrak{n},\ \mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2]\cdot[\mathfrak{n}\,d\mathfrak{s}_1],$$

wie aus der Formel (26) des § 6 folgt, weil $\mathfrak{n}$ senkrecht zu $d\mathfrak{s}_1$ weist, und setzt die beiden, übrigens tangentiell gerichteten Vektoren, die mit dem in eine beliebige Tangentenrichtung fallenden Vektor $[\mathfrak{n}\,d\mathfrak{s}_1]$ skalar multipliziert sind, einander gleich, so erhält man

$$[\mathfrak{n},\ \mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2] = \mathfrak{B}_n \frac{1}{c}\{\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2\}. \tag{275}$$

Hier steht nun links der Flächenwirbel (§ 22) des Vektors $\mathfrak{E}$, und die Gleichung besagt: An einer Gleitfläche besteht ein Flächenwirbel der elektrischen Feldstärke, dessen Dichte gleich ist der Gleitgeschwindigkeit (bezogen auf die Lichtgeschwindigkeit), multipliziert mit der zur

Gleitfläche senkrechten Komponente der magnetischen Induktion. Wirken eingeprägte Kräfte, so tritt an Stelle von $\mathfrak{E}$ der Vektor $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e$.

In der Elektrodynamik bewegter Körper wird demnach die Grenzbedingung, die bei ruhenden Körpern gilt, nämlich die Stetigheit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ — oder, wenn eingeprägte Kräfte wirken, von $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e$ — im allgemeinen nicht mehr zutreffen.

§ 90. Unipolare Induktion.

Als unipolare Induktion bezeichnet man das Auftreten induzierter elektrischer Kräfte infolge der Drehung eines zylindrischen permanenten Magneten um seine Achse. Mit dem elektrisch leitenden Körper des Magneten ist eine ruhende Drahtschlinge elektrisch verbunden; das eine Ende derselben gleitet auf der zylindrischen Mantelfläche, das andere befindet sich auf der Polfläche des Magneten, und zwar in der Drehachse. Der Magnet mag etwa symmetrisch zu dieser Achse magnetisiert sein derart, daß die Vektoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ in die Meridianebene fallen.

In dem Leitungskreise, der durch den Magneten und die Drahtschlinge gebildet wird, tritt nun infolge der Bewegung des Magneten eine induzierte elektromotorische Kraft auf, die bei fortdauernder Bewegung einen stationären Strom erzeugt. Die induzierte Kraft macht sich natürlich nur dann bemerkbar, wenn die Drahtschlinge relativ zum Magneten rotiert. Es ist für das Zustandekommen des Stromes gleichgültig, ob die Drahtschlinge ruht und der Magnet sich dreht, oder ob der Magnet ruht und die Drahtschlinge sich in der entgegengesetzten Richtung dreht.

Es mag zunächst nicht nur der Draht, sondern auch die Luft, welche den sich drehenden Magneten umgibt, als ruhend betrachtet werden. Die Oberfläche des Magneten bildet dann eine Gleitfläche, und da sie von magnetischem Induktionsfluß durchsetzt wird, so ist sie der Sitz von Flächenwirbeln des Vektors $\mathfrak{E}$. Diese Flächenwirbel haben, nach Gleichung (275) des vorigen Paragraphen, hier die gleiche Richtung wie die Geschwindigkeit

des Magneten an dem betreffenden Punkte seiner Oberfläche. Sie bedingen ein Linienintegral von $\mathfrak{E}$ längs einer durch den Magnetkörper und dann längs des Drahtrings verlaufenden geschlossenen Kurve; diese induzierte elektromotorische Integralkraft ruft den Strom in dem Leitungskreise hervor, der durch Magnet und Drahtring gebildet ist.

Räumliche Wirbel von $\mathfrak{E}$ treten übrigens nicht auf, weder innerhalb noch außerhalb des Magneten. Denn berechnet man für eine beliebige, geschlossene, ganz innerhalb oder ganz außerhalb des Magneten verlaufende Fläche, die also ganz dem Magneten oder ganz der Luft angehört, den hindurchtretenden Induktionsfluß, so findet man, daß er zeitlich konstant ist. Es ist also, nach der zweiten Hauptgleichung, das Linienintegral von $\mathfrak{E}$ längs einer Kurve, die ganz im rotierenden Magneten, oder ganz in der ruhenden Luft verläuft, gleich Null; hieraus folgt ohne weiteres, daß räumliche Wirbel von $\mathfrak{E}$ nicht vorkommen. Es muß sich also die gesamte induzierte elektromotorische Kraft aus dem Flächenwirbel an der Gleitfläche berechnen lassen.

Um diese Berechnung auszuführen, betrachten wir eine Meridiankurve der Magnetoberfläche; dieselbe führt von der Achse aus, wo das eine Ende der Drahtschlinge aufsitzt ($s = 0$), bis zu demjenigen Punkte S, der von dem anderen Ende getroffen wird. Es sei r der Abstand eines Punktes P dieser Kurve von der Achse des Magneten, u dessen Winkelgeschwindigkeit. Dann ist die Geschwindigkeit von P

$$v = ur,$$

und nach (275) wird die Dichte des Flächenwirbels

$$\mathfrak{B}_n \frac{v}{c} = \mathfrak{B}_n \cdot \frac{ru}{c}.$$

Längs der Meridiankurve bis zum Punkte S integrierend, erhält man für den gesamten Flächenwirbel und damit für die elektromotorische Integralkraft in dem Stromkreise, der durch Magnet und Drahtring gebildet wird:

(276) $$E = \frac{u}{c} \int_0^s \mathfrak{B}_n r\,ds\,.$$

Durch den Teil der Oberfläche, der von dieser Meridiankurve bei einem Umlauf beschrieben wird, tritt aus dem Magneten der Induktionsfluß

$$\Phi(s) = 2\pi \int_0^s \mathfrak{B}_n r\,ds\,.$$

Mithin kann man setzen

(276 a) $$E = \frac{u}{2\pi c}\,\Phi(s)\,.$$

Dieser Wert der induzierten Integralkraft würde sich nicht ändern, wenn man, statt den Magneten sich drehen zu lassen, ihn festhielte, und statt dessen Draht und Luft im entgegengesetzten Sinne umlaufen ließe; denn die Gleitgeschwindigkeit und damit der Flächenwirbel bliebe der gleiche. Allerdings entspricht die hier anzunehmende Bewegung der Luft mit dem Drahtring nicht der Wirklichkeit. Indessen ändert sich das Ergebnis nicht, wenn man die Luft ruhen und nur den Drahtring rotieren läßt. Dann besteht an dessen Oberfläche eine Gleitfläche, für welche der gesamte Flächenwirbel von $\mathfrak{E}$ wiederum den Wert (276 a) besitzt.

Was die viel erörterte Frage nach dem „Sitz der elektromotorischen Kraft“ anbelangt, so kann die zweite Hauptgleichung sie nicht beantworten. Bestimmt doch das Induktionsgesetz lediglich das Linienintegral von $\mathfrak{E}$ längs einer geschlossenen Kurve. Welche Beiträge die einzelnen Teile des geschlossenen Leitungskreises, also hier etwa Magnet und Drahtring, zum Linienintegral beisteuern, darüber sagt es nichts aus. Die zweite Hauptgleichung bestimmt die Wirbel von $\mathfrak{E}$, aber nicht $\mathfrak{E}$ selbst.

Doch kann man, sobald man die Widerstände der Teile des Stromkreises angibt, auf Grund wohlbekannter Regeln die Verteilung des Linienintegrals von $\mathfrak{E}$ berechnen: Die induzierte Integralkraft verteilt sich auf Magnet und Drahtschlinge im Verhältnis ihrer Widerstände.

§ 91. Das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung.

Wir haben bisher in den §§ 44, 45, 58 und 64 die Betrachtung der mechanischen Kräfte auf ruhende Körper beschränkt, die sich in einem zeitlich konstanten elektrischen und magnetischen Felde befinden. Hier läßt sich die gesamte Kraft durch Überlagerung der elektrischen und magnetischen Flächenkräfte berechnen, woraus allgemein folgt, daß die Kräfte, welche zwei Körper durch die Trennungsfläche hindurch aufeinander ausüben, dem dritten Axiome Newtons Genüge leisten. Was findet nun aber statt, wenn die Körper sich bewegen und wenn das elektromagnetische Feld sich verändert? Auf langsame Veränderungen des Feldes (quasistationäre Ströme) und langsame Bewegung der Körper haben wir in dem ersten Paragraphen dieses Kapitels die für ruhende Körper und konstantes Feld gültigen Gesetze der bewegenden Kräfte ohne weiteres übertragen. Diese Kräfte werden sich daher ohne merklichen Fehler aus den Maxwellschen Spannungen ableiten lassen und daher dem Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung Genüge leisten.

Die Maxwell-Hertzsche Theorie geht noch weiter; sie nimmt an, daß die Maxwellschen Spannungen noch in beliebig rasch veränderlichen elektromagnetischen Feldern die mechanischen Kräfte bestimmen. Es soll also die Gesamtkraft sich stets als Integral über die Begrenzungsfläche des betreffenden Gebietes darstellen lassen:

$$\mathfrak{K} = \int df \{ \mathfrak{T}^e + \mathfrak{T}^m \}, \tag{277}$$

wobei für die elektrische Flächenkraft die Formel (148) des § 45 gilt

$$8\pi \mathfrak{T}^e = 2\mathfrak{E}(\varepsilon\mathfrak{E}, \mathfrak{n}) - \mathfrak{n}\varepsilon\mathfrak{E}^2, \tag{277a}$$

und für die magnetische Flächenkraft die entsprechende Formel (177) des § 58

$$8\pi \mathfrak{T}^m = 2\mathfrak{H}(\mu\mathfrak{H}, \mathfrak{n}) - \mathfrak{n}\mu\mathfrak{H}^2. \tag{277b}$$

Wir wollen nun untersuchen, welcher Ausdruck für die auf die Volumeinheit bezogene Kraft aus dieser Annahme folgt. Wir

gehen dabei aus von der Formel (147) des § 45; dieselbe ergibt, gemäß (277 a, b):

$$8\pi \int df\mathfrak{T}^e = \int dv \{2\mathfrak{E} \operatorname{div} \varepsilon\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^2 \nabla \varepsilon - 2[\varepsilon\mathfrak{E} \operatorname{curl} \mathfrak{E}]\},$$

$$8\pi \int df\mathfrak{T}^m = \int dv \{2\mathfrak{H} \operatorname{div} \mu\mathfrak{H} - \mathfrak{H}^2 \nabla \mu - 2[\mu\mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{H}]\}.$$

Setzt man nun, den Hauptgleichungen für ruhende Körper entsprechend,

$$\operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{i} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t},$$

und ferner

$$\operatorname{div} \varepsilon\mathfrak{E} = \operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\varrho, \qquad \operatorname{div} \mu\mathfrak{H} = \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$

so erhält man

$$\text{(277c)} \quad \int df\mathfrak{T}^e = \int dv \left\{\varrho\mathfrak{E} - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{4\pi c}\left[\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right]\right\}.$$

$$\text{(277d)} \quad \int df\mathfrak{T}^m = \int dv \left\{\left[\frac{\mathfrak{i}}{c}\mathfrak{B}\right] - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2 \nabla \mu - \frac{1}{4\pi c}\left[\mathfrak{B}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right]\right\}.$$

Die Einführung in (277) ergibt als gesamte Kraft:

$$\text{(278)} \qquad \mathfrak{K} = \int dv \{\mathfrak{f}^e + \mathfrak{f}^m + \mathfrak{f}^s\}, \qquad \text{wo}$$

$$\text{(278a)} \qquad \mathfrak{f}^e = \varrho\mathfrak{E} - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2 \nabla \varepsilon$$

(vgl. § 44, Gl. 145) und

$$\text{(278b)} \qquad \mathfrak{f}^m = \left[\frac{\mathfrak{i}}{c}\mathfrak{B}\right] - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2 \nabla \mu$$

(vgl. § 58, Gl. 178) die auf die Volumeinheit bezogene Kräfte des elektrischen und des magnetischen Feldes bedeuten.

Hierzu tritt jetzt, der Maxwell-Hertzschen Theorie nach, eine neue Kraft, die im veränderlichen elektromagnetischen Felde auftritt:

$$\mathfrak{f}^s = \frac{1}{4\pi c}\left\{\left[\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right] + \left[\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\mathfrak{B}\right]\right\}, \qquad \text{oder}$$

$$\text{(278c)} \qquad \mathfrak{f}^s = \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] = \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}.$$

Dieser, der zeitlichen Änderung des Poyntingschen Strahlvektors proportionale Vektor bestimmt die von den Maxwellschen Span-

nungen herrührende Kraft für den Fall eines homogenen ungeladenen Isolators, wo $\mathfrak{k}^e$ und $\mathfrak{k}^m$ verschwinden.

Die Maxwellschen Spannungen üben also auf die Teile eines ungeladenen ruhenden Isolators eine Kraft aus, sobald der Strahlvektor an der betreffenden Stelle des Feldes sich zeitlich ändert. Obwohl der Betrag dieser Kraft außerordentlich gering ist, so ist diese Folgerung der Maxwell-Hertzschen Theorie doch von wesentlicher Bedeutung. Diese „bewegende" Kraft würde nämlich auch auf den leeren Raum wirken, in dem doch Materie, welche durch sie bewegt werden könnte, sich nicht befindet.

Die von den Maxwellschen Spannungen übertragenen Kräfte erfüllen zwar das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung; wenn aber, wie wir gesehen haben, bei Strahlungsvorgängen eine Kraft auf den Äther zur Aufrechterhaltung dieses Gesetzes eingeführt werden muß, so heißt das: Für die Materie allein gilt das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung nicht. Die gesamte Bewegungsgröße der wägbaren Materie in einem abgeschlossenen Systeme ist nicht konstant. Man hat vielmehr, wenn man die Sache vom Standpunkte der Maxwell-Hertzschen Theorie aus betrachtet, eine Rückwirkung des Äthers auf die Materie in Betracht zu ziehen, deren Resultierende nach (278) und (278c) ist:

$$\mathfrak{K} = -\int \frac{dv}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}. \tag{279}$$

Wenn bei einem Strahlungsvorgange diese Kraft nicht gleich Null ist, so wird die Bewegungsgröße der wägbaren Materie im Verlaufe des Strahlungsvorganges sich ändern.

Daß das dritte Axiom Newtons bei der Übertragung auf die elektromagnetischen Vorgänge seinen Sinn wesentlich ändert, ist schon durch die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wirkungen bedingt. Fassen wir beispielsweise den Fall ins Auge, daß eine elektromagnetische Welle von einem Hertzschen Hohlspiegelerreger ausgesandt wird; da der Wert der Kraft hier von Null verschieden ist, so wird die Welle dem Erreger einen, wenn auch geringen, Rückstoß erteilen; diese Wirkung bleibt zunächst

ohne Gegenwirkung. Und auch wenn die Welle später von anderen Körpern absorbiert ist und das Zeitintegral von (279) dann gleich Null geworden ist, so ist doch eine gewisse Zeit zwischen der Wirkung und der Gegenwirkung verstrichen; während dieser Zeit ist der Impuls der wägbaren Körper durch den Strahlungsvorgang geändert worden.

Die von H. A. Lorentz entwickelte Theorie der Elektrodynamik nimmt, im Gegensatz zur Hertzschen, Kräfte, die auf den an Materie und Elektrizität leeren Raum wirken, überhaupt nicht an. Sie läßt die elektromagnetischen Kräfte nur auf die elektrisch geladene Materie wirken. Die Maxwellschen Spannungen werden hier nicht als allgemeingültige Darstellung der elektromagnetischen Kräfte betrachtet. Nur in solchen Fällen, wo der Ausdruck (279) verschwindet, sieht auch die Lorentzsche Theorie das Maxwellsche Spannungssystem als vollständigen Ausdruck der mechanischen Kräfte des Feldes an. Mit den Maxwellschen Spannungen gibt diese Theorie, auf welche wir übrigens im zweiten Bande dieses Werkes ausführlich zurückkommen, natürlich auch die allgemeine Gültigkeit des Prinzips von Wirkung und Gegenwirkung auf.

Aus diesen Andeutungen geht hervor, daß hinsichtlich der mechanischen Kräfte die verschiedenen Theorien der Elektrodynamik bewegter Körper voneinander abweichen. Sie ergeben allerdings alle die von der Erfahrung bestätigten Ausdrücke (278 a, b) für die Kräfte in stationären und quasistationären Feldern. Die Abweichungen beziehen sich nur auf rasch veränderliche Felder und auf rasche Bewegungen, deren Geschwindigkeit mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar ist. Daß hier die verschiedenen Theorien in ihren Aussagen über die bewegenden Kräfte nicht ganz übereinstimmen, kann nicht wundernehmen. Sind doch diese Kräfte mit den Vorgängen im elektromagnetischen Felde durch das Energieprinzip verknüpft; Theorien, die von verschiedenen Fassungen der Feldgleichungen für bewegte Körper ausgehen, werden auch in bezug auf die mechanische Arbeit bei einer Bewegung zu verschiedenen Ergebnissen gelangen.

Wir haben uns in diesem ersten Bande auf die Maxwellsche

Theorie in engerem Sinne beschränkt, die alles das enthält, was den auf ihr fußenden Theorien gemeinsam ist, nämlich: die Feldgleichungen für ruhende Körper, auch für rasch veränderliche Felder; die mechanischen Kräfte für quasistationäre Felder; endlich das Induktionsgesetz für bewegte Leiter. Es sind dies übrigens gerade diejenigen Teile der Elektrizitätslehre, welche auf elektrotechnische Fragen Anwendung finden. Die außerhalb dieses Gedankenkreises liegenden, zum Teil noch strittigen Fragen, die mit der Elektrodynamik bewegter Körper zusammenhängen, weisen wir dem zweiten Bande zu. Dort werden sowohl die Anschauungen der Elektronentheorie als auch die mehr phänomenologischen Weiterbildungen der Maxwellschen Theorie erörtert werden.

Formelzusammenstellung.

I. Allgemeine Regeln der Vektorenrechnung.

Alle Vektoren sind durch Frakturbuchstaben kenntlich gemacht, wie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{v}$ usf.; die Beträge sind mit $|\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{B}|$, die Komponenten nach den Koordinatenachsen mit $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ bezeichnet. Das skalare Produkt wird $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, oder, wenn eine Abtrennung von anderen Vektoren erwünscht ist, $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ geschrieben; $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ dagegen stellt das Vektorprodukt dar.

1. Vektoralgebra.

$$(\alpha)\quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z \quad \ldots \quad \text{(Gl. 14, S. 13)}$$

$$(\beta)\quad [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{A}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{B}_z \end{vmatrix} \quad \ldots \quad \begin{pmatrix} \text{Gl. 17, S. 16} \\ \text{u. Gl. 20, S. 17} \end{pmatrix}$$

$$(\gamma)\quad \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{B}_z \\ \mathfrak{C}_x & \mathfrak{C}_y & \mathfrak{C}_z \end{vmatrix} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 22, S. 19)}$$

$$(\delta)\quad [\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \quad \ldots \quad \text{(Gl. 24, S. 20)}$$

$$(\varepsilon)\quad [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \cdot [\mathfrak{C}\mathfrak{D}] = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - (\mathfrak{B}\mathfrak{C})(\mathfrak{A}\mathfrak{D}) \quad \ldots \quad \text{(Gl. 26, S. 20)}$$

2. Vektoranalysis.

$$(\zeta)\quad \nabla\varphi = \mathfrak{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 58 a, S. 32)}$$

$$(\eta)\quad \operatorname{div}\mathfrak{A} = \nabla\mathfrak{A} = \frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial z} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 62, S. 37)}$$

$$(\vartheta)\quad \operatorname{curl}\mathfrak{A} = [\nabla, \mathfrak{A}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \end{vmatrix} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 91, S. 63)}$$

(ι) $\operatorname{div} \varphi \mathfrak{A} = \varphi \operatorname{div} \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \nabla \varphi$ . . . . (Gl. 65, S. 40)

($\varkappa$) $\operatorname{curl} \varphi \mathfrak{A} = \varphi \operatorname{curl} \mathfrak{A} + [\nabla \varphi, \mathfrak{A}]$. . . . . (Gl. 112, S. 89)

(λ) $\operatorname{div} [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{B}$ . . . . (Gl. 102, S. 74)

(μ) $\operatorname{curl} [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + \mathfrak{A} \operatorname{div} \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{A}$ . . . . (Gl. 114, S. 90)

(ν) $\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{B}] + [\mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{A}]$ . . . . (Gl. 115, S. 90)

(ξ) $\operatorname{div} \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ . . (Gl. 67, 68, S. 41)

(o) $\operatorname{curl} \nabla \varphi = 0$ . . . . (Gl. 91a, S. 63)

(π) $\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = 0$ . . . . (Gl. 94, S. 69)

(ϱ) $\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = \operatorname{curl}^2 \mathfrak{A} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{A} - \nabla^2 \mathfrak{A}$ . . (Gl. 95, S. 70)

Satz von Gauß:

(σ) $\int dv \operatorname{div} \mathfrak{A} = \int df \mathfrak{A}_n$ . . . . (Gl. 64, S. 39)

Satz von Green:

(τ) $\int du \{\psi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi, \nabla \psi)\} = \int df \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}$. . (Gl. 70, S. 41)

(v) $\int dv \{\mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{B}\} = \int df [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_n$ (Gl. 102a, S. 74)

folgt aus λ und σ.

Satz von Stokes:

(φ) $\int df \operatorname{curl}_n \mathfrak{A} = \int \mathfrak{A} d\mathfrak{s}$ . . . . (Gl. 92, S. 67)

Skalares Potential:

(χ) $\varphi = \int \frac{dv \varrho}{r}$ . . . . (Gl. 83, S. 50)

dient zur Berechnung des wirbelfreien Feldes

$$\mathfrak{v} = -\nabla \varphi,$$

wenn $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 4\pi\varrho$ gegeben ist.

Vektorpotential:

(ψ) $\int \frac{dv \mathfrak{c}}{r}$ . . . . (Gl. 100, S. 72)

dient zur Berechnung des quellenfreien Feldes

$$\mathfrak{v} = \text{curl}\, \mathfrak{A}\,,$$

wenn
$$\text{curl}\, \mathfrak{v} = 4\pi \mathfrak{c}$$

gegeben ist, und genügt der Gleichung (101)

$$\text{div}\, \mathfrak{A} = 0\,,$$

wenn div $\mathfrak{c} = 0$ gilt.

Zeitliche Änderung eines Vektors, beurteilt von einem starr rotierenden Bezugssystem aus (Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$).

(ω) $\dfrac{d'\mathfrak{A}}{dt} = \dfrac{d\mathfrak{A}}{dt} + [\mathfrak{A}\mathfrak{u}]$ . . . . (Gl. 35, S. 25)

II. Elektrisches Feld.

$\mathfrak{E}$ elektrische Feldstärke, $\mathfrak{D}$ elektrische Verschiebung, ε Dielektrizitätskonstante, ϱ, ω Raumdichte und Flächendichte der wahren Elektrizität e; ϱ', ω' Raumdichte und Flächendichte der freien Elektrizität e'; U elektrische Energie, $\mathfrak{i}$ Dichte des Leitungsstromes, $\mathfrak{c}$ Dichte des wahren Stromes, σ Leitfähigkeit, Q Joulesche Wärme.

(a) $\mathfrak{K} = e \cdot \mathfrak{E}$ (Kraft auf Probekörper) . . (Gl. 116, S. 92)

(b) $\mathfrak{D} = \varepsilon \cdot \mathfrak{E}$ . . . . (Gl. 128, S. 111)

(c) $4\pi\varrho = \text{div}\, \mathfrak{D}, \quad 4\pi\omega = -(\mathfrak{D}_{n1} + \mathfrak{D}_{n2})$. (Gl. 127 a, b, S. 111)

(n_1, n_2 Normalen, die nach der Trennungsfläche hinweisen.)

(d) $4\pi\varrho' = \text{div}\, \mathfrak{E}, \quad 4\pi\omega' = -(\mathfrak{E}_{n1} + \mathfrak{E}_{n2})$ (Gl. 129, 129 a, S. 112)

(e) $U = \dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) = \dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int dv\,\varepsilon\,\mathfrak{E}^2$. . . (Gl. 138, S. 131)

(f) $\mathfrak{i} = \sigma\mathfrak{E}$ (Ohmsches Gesetz) . . . . (Gl. 152 a, S. 161)

(g) $Q = \displaystyle\int dv\,(\mathfrak{i}\mathfrak{E}) = \int dv\,\sigma\,\mathfrak{E}^2$ . . . . (Gl. 154 a, S. 161)

(h) $\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} = \sigma\mathfrak{E} + \dfrac{\varepsilon}{4\pi}\dfrac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}$ . . . . (Gl. 157, S. 164)

Kraft auf Volumeinheit

(i) $\mathfrak{k}^e = \varrho\mathfrak{E} - \dfrac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2\nabla\varepsilon$ . . . . (Gl. 145, S. 150)

III. Elektromagnetisches Feld.

$\mathfrak{H}$ magnetische Feldstärke, $\mathfrak{B}$ magnetische Induktion, $\mathfrak{M}$ Magnetisierung, μ Permeabilität, T magnetische Energie, $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$ Raum- und Flächendichte des freien Stromes.

(k) $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ . . . . (Gl. 165, S. 191)

(l) $\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$ . . . . (Gl. 165a, S. 192)

Erste Hauptgleichung: 1) wenn nur Leitungsströme vorkommen

(m) $\operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{i}$ . . . . (Gl. 169, S. 195)

2) wenn Verschiebungsströme hinzukommen:

(n) $\operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{c} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{i} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ . . . . . (Gl. I, Ia, S. 215)

Zweite Hauptgleichung:

(o) $\operatorname{curl} \{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$ . . . . (Gl. II, S. 217)

(p) $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ . . . . (Gl. 167, S. 193)

(q) $\mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi} \{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}\} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \cdot \mathfrak{H}$ . . . . . (Gl. 173, S. 201)

(r) $\operatorname{curl} \mathfrak{B} = \frac{4\pi \mathfrak{i}'}{c}, \quad [\mathfrak{n}, \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2] = \frac{4\pi \mathfrak{j}'}{c}$ (Gl. 175, 175a, S. 206)

(s) $\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \int \frac{dv\, \mathfrak{i}}{r} + \int dv \left[\mathfrak{M}, \nabla_q \frac{1}{r}\right]$ . . (Gl. 176c, S. 209)

(t) $\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \int \frac{dv \mu \mathfrak{i}}{r} + \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{r} [\nabla \mu, \mathfrak{H}]$. (Gl. 175f, S. 207)

Kraft auf die Volumeinheit im magnetischen Felde

(u) $\mathfrak{k}^m = \left[\frac{\mathfrak{i}}{c} \mathfrak{B}\right] - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \nabla \mu$ . . . . (Gl. 178, S. 212)

Feldgleichungen und Energieausdruck für ruhende, isotrope, nichtferromagnetische Körper:

(v) $\begin{cases} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E} \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl} (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e) \end{cases}$ (Gl. 180, S. 222)

(w) $W = \frac{1}{8\pi} \int dv (\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2)$ . . . . (Gl. 180a, S 224)

Quasistationäre Ströme:

L Induktionskoeffizienten, *K* Kapazität, *R* Widerstand, *J* Stromstärke, τ Schwingungsdauer.

Koeffizient der gegenseitigen Induktion:

(x) $L_{12} = \mu \int \int \frac{d\mathfrak{s}_1\, d\mathfrak{s}_2}{r}$ . . . . (Gl. 183 b, S. 238)

Magnetische Energie zweier Stromringe:

(y) $T = \frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2\right\}$ (Gl. 186, S. 242)

(z) $\tau = \frac{2\pi}{c}\sqrt{LK}$ (Thomsonsche Formel) (Gl. 201 i, S. 262)

Elektromagnetische Wellen:

w Geschwindigkeit, λ Wellenlänge, n Brechungsindex $\varkappa$ Extinktionskoeffizient. K, L beziehen sich hier auf die Längeneinheit der Leitung.

($\mathfrak{a}$) $n^2 = \varepsilon$ . . . . (Gl. 205 d, S. 272)

(Maxwellsche Beziehung, für $\mu = 1$ gültig)

($\mathfrak{b}$) $n^2 = \frac{\mu}{2}\left\{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2} + \varepsilon\right\}$ . . . . (Gl. 207 f, S. 278)

($\mathfrak{c}$) $\varkappa^2 = \frac{\mu}{2}\left\{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2} - \varepsilon\right\}$ . . . . (Gl. 207 g, S. 278)

Für lange Wellen in Metallen wird:

($\mathfrak{d}$) $n = \varkappa = \sqrt{\sigma\tau}$ (wenn $\mu = 1$) . . . . (Gl. 210 a, S. 284)

und der Reflexionskoeffizient:

($\mathfrak{e}$) $r = 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma\tau}}$ . . . . (Gl. 210 b, S. 285)

Geschwindigkeit längs guter, zylindrischer Leiter:

($\mathfrak{f}$) $w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{LK}}$ . . . . (Gl. 216 e, f, S. 302)

($\mathfrak{g}$) $\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e, \mathfrak{H}]$ . . . . (Gl. 227, S. 316)

Poyntingscher Energiestrom oder Strahlvektor. Der komplexe Poyntingsche Vektor:

($\mathfrak{h}$) $\dot{\mathfrak{U}} = \frac{c}{8\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}^*]$, ... (Gl. 233, S. 325)

wo $\mathfrak{H}^*$ der zu $\mathfrak{H}$ konjugiert komplexe Vektor ist, ergibt für ein Schwingungsfeld

($\mathfrak{i}$) $\int df\, \mathfrak{U}_n = \bar{Q} + i \cdot 2\nu\{\bar{T} - \bar{U}\}$ . . . . (Gl. 234, S. 326)

Aus dem Hertzschen Vektor $\mathfrak{Z}$ leiten sich die Feldstärken im Vakuum folgendermaßen ab:

(𝔨)
$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathfrak{E} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} \quad \ldots \ldots \\ \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \operatorname{curl} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \quad \ldots \ldots \end{array}\right\} \quad \text{(Gl. 240, S. 331)} \\ \text{Für } \mathfrak{Z} \text{ muß dabei die Differentialgleichung gelten} \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathfrak{Z} \quad \ldots \ldots \quad \text{(Gl. 240a, S. 331)} \end{array}\right.$$

IV. Weiterer Ausbau der Theorie.

Feldenergie permanenter Magnete:

(𝔩) $$T = \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}^2 + T_0 - \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}_0^{\,2} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 258, S. 355)}$$

(𝔪) $$T = -\int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{B}^2 + T_0 + \int \frac{dv}{8\pi}\mathfrak{B}_0^{\,2} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 262, S. 363)}$$

Zwei bewegte Stromringe mit eingeprägten Kräften:

(𝔫)
$$\left.\begin{array}{l} E_1^{\,e} = J_1 R_1 + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{11} J_1) + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12} J_2) \quad . \\ E_2^{\,e} = J_2 R_2 + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12} J_1) + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{22} J_2) \quad . \end{array}\right\} \quad \text{(Gl. 265, S. 373)}$$

Zweite Hauptgleichung für bewegte Körper:

(𝔬) $$\operatorname{curl}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\right\} \quad \text{(Gl. 272, S. 381)}$$

Maxwellsche Spannungen: $\mathfrak{T}^e$, $\mathfrak{T}^m$ Flächenkraft der elektrischen und magnetischen Spannungen.

(𝔭) $$\mathfrak{T}^e = \frac{1}{8\pi}\{\mathfrak{E}\cdot 2\varepsilon(\mathfrak{E}\mathfrak{n}) - \mathfrak{n}\cdot\varepsilon\mathfrak{E}^2\} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 148, S. 153)}$$

(𝔮) $$\mathfrak{T}^m = \frac{1}{8\pi}\{\mathfrak{H}\cdot 2\mu(\mathfrak{H}\mathfrak{n}) - \mathfrak{n}\cdot\mu\mathfrak{H}^2\} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 177, S. 210)}$$

Sachregister.

